十七

运筹学

运筹学 [operations research, operational research] 朴素的运筹思想在世界和中国古代历史中源远流长，但直到 20 世纪初，奠定现代运筹学发展基础的先驱性工作才先后呈现，如 1908 年埃尔朗 (A. K. Erlang) 关于电话话务理论的研究，其后兰彻斯特 (F. W. Lanchester) 关于战争兵力部署的理论，20 世纪 20 年代莱文森 (Levinson) 关于最优发货量的讨论，以及 30 年代末康托罗维奇 (Канторович) 总结他研究工作的著作《生产组织与计划中的数学方法》以及其他许多当时在*活动分析*名义下所进行的科学研究。而作为一门独立新兴学科的系统研究，并予以正式命名的运筹学，却是在第二次世界大战前后才逐渐发展形成的。

运筹学的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划活动，它的研究目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律，以便发挥有限资源的最大效益，来达到总体、最优的目标。这里所说的“资源”是广义的，既包括物质材料，也包括人力配备；既包括技术装备，也包括社会结构。

强调研究过程的完整性是运筹学研究的一个重要特点，从问题的形成开始，到构造模型、提出解决方案、进行检验、建立控制，直至付诸实施为止的所有环节构成了运筹学研究的全过程。因此，它涉及的不仅是方法论，而且与社会、政治、经济、军事、科学、技术各领域都有密切的关系。

运筹学研究的另一特点是强调理论与实践的结合，这在运筹学的创建时期就已经显现出来，不论是武器系统的有效使用，还是生产组织或电话、电信问题，都是与当时的社会实践密切联系的，在解决这些实际问题的同时，运筹学逐渐形成了完整的理论体系，发展成为一门独立的科学学科。

因而在运筹学的研究方法上自然显示出各学科方法的综合，其中特别值得注意的是数学方法、统计方法、逻辑方法、与模拟方法。应该指出，数学方法 (或者说，构造数学模型的方法) 是运筹学中最重要的方法，它对运筹学的重要性绝不亚于它对力学、理论物理所起的作用。所以，从强调方法论，特别是数学方法论的观点而言，可以把运筹学中反映数学研究内容的那部分，看成运筹学与数学的交叉分支，称之为运筹数学，正如生物数学、经济数学、数学物理等作为生物学、经济学、物理学与数学的交叉分支相类似。但是，运筹学本身的独立学科性质是由它特定的研究对象所决定的，也正像生物学、经济学、力学、物理学等作为数学以外的独立学科那样无庸置疑。

基于运用筹划活动的不同类型，描述各种活动的不同模型逐渐建立，从而发展了各种理论，形成了运筹学的不同分支。例如其基础学科分支中的规划理论 (包括*线性规划*、*整数规划*、*非线性规划*、*多目标规划*、*动态规划*、*参数规划*、*不可微最优化*、*全局最优化*等)，随机运筹理论 [包括*排队论*(随机服务系统理论)、*可靠性理论*、维修更新理论、*水库论*、*库存论*(订货论)、*供应链管理*、*搜索论*、随机网络分析与优化、随机逼近理论、*随机规划*、随机计算理论、随机排序、离散事件动态系统、随机模拟等]，组合及网络优化理论 (包括*图论*、网络流与网络优化、*排序*与时间表、*拟阵理论*等)，*对策论*, 决策理论 (包括*决策分析*、*多目标决策*、决策与协商、*马尔可夫决策理论*、决策支持系统等)；计算运筹学 (包括计算复杂性、*神经网络算法*、*启发式算法*、并行算法等)，工程技术运筹学 (包括工程可靠性、系统分析、结构优化理论、制造系统评估与优化、通信系统评估与优化、计算机系统评估与优化等)，管理运筹学 (包括*优选*与统筹、软科学方法论、*投入产出法*、质量管理、项目管理、管理信息系统等)；以及应用学科分支中的工业运筹学，农业运筹学，交通运输运筹学，军事运筹学，公用事业运筹学，金融、市场、保险运筹学，资源、生态，环境运筹学，生命科学运筹学等。

(执笔：徐光辉　校阅：章祥荪)

最优化 [optimization] 利用数学的工具求得一个函数的极大值或极小值以及对应于这些值的最优解或近似最优解。最优化理论是运筹学的主要组成部分，是运筹数学中以数学分析、组合学为主要工具的部分。最优化研究以一些从大量实践中抽象出来的典型模型为对象，形成了包括*线性规划*、*整数规划*、*非线性规划*、*多目标规划*、*动态规划*、*参数规划*、*随机规划*、*组合优化*及网络优化理论等分支。

从研究的内容来说，可分成理论和算法两部分。解的*最优性条件*、*对偶规划*、*凸分析与非凸分析*、*不可微理论*等是理论研究的对象；算法研究包括算法设计、收敛性和收敛速度分析、近似理论和计算复杂性分析。

大部分最优化研究不用统计和概率、随机过程理论，故称为确定性最优化，反之，称为*随机最优化*。在确定型最优化中，有一类问题的决策变量是连续的，称之为连续最优化问题；相对而言，变量为离散的优化问题称之为组合最优化问题。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

随机最优化 [stochastic optimization] 随机最优化问题是一类*最优化*问题，相对于确定性优化问题来说，是特指带有随机因素的最优化问题，需要利用概率统计、随机过程以及随机分析等工具。

所谓的随机因素，包括环境的随机因素、控制变量不确定因素、准则值的不确定因素等。例如，在考虑水库优化调度问

题的时候，天然来水一般是三阶皮尔逊分布的随机变量。在考虑库存管理问题时，变动的需求常常考虑为外生的随机变量。这些都属于环境的不确定因素。在排队系统中服务速率确定后，真实的服务时间依然是随机变化的，这属于控制变量的不确定因素。使用药物最终能够达到的效果往往不是确定的，评判最优的值函数在很多问题中也具有不确定性，等等。

人们处理随机因素的第一种方法是期望值方法，将随机的因素用它的期望值代替，将问题转化为确定性问题考虑。第二种方法是在概率意义下考虑优化问题。例如在置信区间范围内考虑优化问题，将问题转换为概率约束或者是机会约束的优化问题；又例如考虑极大化某些事件的概率问题，也称为相关机会约束问题。第二种方法相对于期望值方法的优点是考虑到各种风险的影响，缺点是使得问题的处理变得相对困难。

随机最优化最典型的研究内容包括：随机规划、排队论、库存理论、可靠性理论、马尔可夫决策过程、风险分析、决策分析、对策理论、供应链、投资组合分析等方向。

(执笔：刘克　校阅：章祥荪)

活动分析 [**activity analysis**]　运筹学 (Operations Research) 一词最早出现在第二次世界大战期间， 当时运筹学这一名词下的研究活动主要是军事运筹。而那个时期，对于经济生活中的定量决策问题的研究主要是在活动分析的旗帜下开展的。1951 年，科普曼斯 (T. Koopmans) 编辑的《生产和分配中的活动分析》一书，是活动分析的一个里程碑。那个时候，在活动分析的大旗下，活跃着一大批著名的经济学家和数学家。这中间经济学家有列昂惕夫 (W. Leontief)、科普曼斯、阿罗 (K. Arrow)、萨缪尔森 (P. Samuelson)、多夫曼 (R. Dorfman)、赫维奇 (L. Hurwicz) 和斯卡夫 (H. Scarf)，其中六位后来获得了诺贝尔经济学奖，数学家有冯・诺依曼 (von Neumann)、丹齐格 (G. B. Dantzig)、塔克 (T. A. Tucker)、库恩 (H. Kuhn)、伍德 (M. Wood)、盖尔 (D. Gale) 等。在他们的积极参与和大力推动下，活动分析得到了突飞猛进的发展。

在活动分析中做出巨大贡献的，当推冯・诺依曼、丹齐格、列昂惕夫和科普曼斯四人。在 20 世纪 30 年代奥地利和德国经济学家对瓦尔拉 (Walras) 系统研究的基础上，冯・诺依曼提出了自己的一般经济平衡模型，他和莫根斯特恩 (O. Morgenstern) 所著《对策论和经济行为》一书，对数理经济和对策论的发展起到了深远的影响，他因此被尊为对策论之父。

1932 年，列昂惕夫针对美国经济，建立了所谓“产业部门之间的投入产出模型(Interindustry Input-Output Model)”，不仅直接导致投入产出学科的产生，而且对丹齐格线性规划模型的产生起到了推动作用。

活动分析的积极倡导者科普曼斯第二次世界大战期间曾在英美船舶调整委员会 (Combined Shipping Adjustment Board)，研究商船调度问题 (即后来逐渐演化成线性规划中的运输问题)。20 世纪 40 年代设在芝加哥大学，并由科普曼斯领导的考尔斯委员会 (Cowles Commission) 在活动分析的发展中起到重大作用。科普曼斯后来获得诺贝尔经济学奖与他这段时间对活动分析的贡献是分不开的。

20 世纪 50 年代活动分析旗帜下的各个研究方向，后来均发展成运筹学的独立学科分支，原先意义下活动分析的名称逐渐淡出。现在人们用活动分析这个词，常常只是使用它的普通语义，指对某项活动进行系统、客观和深入的分析。

(执笔：杨晓光　校阅：刘克)

17.1　数学规划理论

数学规划 [**mathematical programming**]　在变量满足一定约束下求一个 (或多个) 实函数的极小值或者极大值。数学规划研究这些问题的数学性质，构造求解这些问题的方法，实现求解这些问题的算法，以及将算法应用于实际问题。

数学规划有众多的分支方向，包括：线性规划、非线性规划、整数规划、参数规划、网络与组合优化、非光滑优化、全局最优化、多目标规划、随机规划、半无限规划、互补与变分不等式、鲁棒优化、半定规划等。数学规划还同运筹学中的其他分支，例如对策论、物流等有交叉。

(执笔：袁亚湘　校阅：章祥荪)

二次规划 [**quadratic programming**]　最简单的非线性最优化(非线性规划) 问题，它的目标函数是二次的，约束条件是线性的，其一般形式为：

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{Q}$ 为 $n\times n$ 对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$。若 $\boldsymbol{Q}$ 为半正定矩阵，则该二次规划是一个凸规划。若为正定矩阵，则二次凸规划有唯一的局部最优解，也是全局最优解。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

可分[离]规划 [**separable programming**]　一类特殊的非线性规划，其目标函数与约束函数都是若干个仅含一个变量的函数的和函数，即问题具有如下形式：

$$\min\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \leqslant p_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n。$$

因此可用特殊方法求解。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

双层规划 [bilevel programming]　一种具有二层递阶结构的系统优化问题，其上层问题和下层问题都有各自的决策变量、约束条件和目标函数。上层问题的目标函数和约束条件不仅与上层决策变量有关，而且还依赖于下层问题的最优解，同时下层问题的最优解又受到上层决策变量的影响。这种决策机制使得上层决策者在选择策略来优化自己的目标时，必须考虑到下层决策者可能采取的策略对自己的不利影响。

设上层决策者控制的变量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in X \subset \mathbb{R}^n$，下层决策者控制的变量为 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}} \in Y \subset \mathbb{R}^m$。双层规划的一般形式可描述为：

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}\in X} \ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &\ \text{s.t.}\ G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant 0, \\ &\qquad \min_{\boldsymbol{y}\in Y} \ f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ &\qquad \ \text{s.t.}\ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant 0, \end{aligned}$$

其中，$F,f: X\times Y \to \mathbb{R}^1$，$G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$，$g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ 为一般函数。集合 X 和 Y 包含了变量的其他约束，如非负性或整数性要求等。

双层规划是在研究非平衡经济市场竞争时首先提出的。其在实际问题中有许多应用，如交通领域中的城市交通网络设计问题 (NDP)、O-D 需求估计问题和交通控制问题；管理中的资源分配问题、价格问题、生产计划问题和供应链管理。另外，在工程设计、兵力部署、设施定位、政策规划等方面，双层规划也有独特的应用。

（执笔：修乃华　校阅：赖炎连）

目标规划 [goal programming]　在一类多目标优化问题中，由于优化的目标的属性、量纲与重要程度不同，因而目标具有层次性以及同一层次中表示重要程度的权重也不同。复杂多样的目标与制约条件，也常常难以用统一的方式进行数学描述，各个数学表达式之间也可能相互矛盾而使问题无解。1961 年，查尼斯 (A. Charnes) 和库珀 (W. W. Cooper) 从“松弛”的观点出发，提出目标规划或称目的规划来解决这种用传统方法难于处理的问题。方法的基本思想是对于各个目标都相应确定一个理想值或预测值，并引入与各个目标的理想值和约束条件产生偏离的正负偏差变量，确定分批优化的目标的先后等级顺序与各同一级目标的不同的权重。目标规划是单目标规划，目标函数是各偏差变量之和，应用单目标优化方法在容许偏离的条件下用分层依次求解的方法，求得关于与目标和各约束条件具有最小偏离值的解。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

几何规划 [geometric programming(GP)]　非线性规划的一个分支，20 世纪 60 年代中期由美国科学家达芬 (R. J. Duffin)、彼得森 (E. L. Peterson) 和齐纳 (C. Zener) 首先提出，用以解决西屋公司 (Westing House) 变压器设计分析问题，后被广泛应用于多类工程及管理之决策优化。几何规划的主要特征在于其目标函数及约束函数的形式。以正项几何规划为例，假设我们有 n 个正值实变数 $x_1,\cdots,x_n>0$，并以向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 代表。对于给定的 m 个正值实数 $c_1,\cdots,c_m>0$ 及 $m\times n$ 个一般实数 $(a_{ij}), i=1,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n$，下列实函数

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \cdots x_n^{a_{in}}$$

称为正项多项式函数(posynomial function)。当 $f_0(\boldsymbol{x})$，$f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})$ 为 $p+1$ 个给定的正多项式函数，最基本的几何规划问题是寻求下列问题的最优解：

$$\begin{aligned} &\min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad f_k(\boldsymbol{x}) \leqslant 1, \quad k=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

（执笔：方述诚　校阅：章祥荪）

正项几何规划 [posynomial geometric programming (PGP)]　对一个最基本的几何规划问题而言，由于 $f_0(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})$ 均为正项多项式，因而，称之为正项几何规划。

正项几何规划有以下重要的性质：

(1) 正项几何规划问题的目标函数及约束虽然是非凸函数，但经由适当的对数变换：

$$z_j=\ln x_j, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

则

$$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{e}^{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}z_j}.$$

因为指数函数为凸函数，当 $c_i>0, i=1,\cdots,m$，函数 $g(\boldsymbol{z})$ 成为凸函数。其局部最优解即为全局最优解。

(2) 正项几何规划问题可利用数学上著名的几何不等式(geometric inequality)：

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i v_i \geqslant \prod_{i=1}^{m} (v_i)^{\delta_i}$$

$\left(\text{其中 } \delta_i \geqslant 0, v_i>0, i=1,\cdots,m, \text{ 且 } \sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i=1\right)$来建构一

个对偶问题。此对偶是一个只有线性约束的凸优化问题，所以比原问题易解。

值得注意的是当函数$f(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\cdots x_n^{a_{in}}$ 中的部分系数 $c_i<0$, 则称为“正负项几何规划”(signomial programming)。这种问题及其对偶问题则不具凸函数及凸优化的优点，也更难求得最优解。

（执笔：方述诚　校阅：章祥荪）

广义几何规划 [generalized geometric programming (GGP)]　正项几何规划的主要思想是利用对数变换将非凸的正项多项式化为指数型凸函数，再利用几何不等式将非线性的原优化问题转化为带有线性约束的凸优化对偶问题。受此启发，逐渐推演出广义几何规划。

假设 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$，$X\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个锥集；$C\subseteq\mathbb{R}^n$ 是函数 f 定义域内的一个子集。一个广义几何规划问题具有如下标准形式：

$$\begin{aligned}&\min \quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in X\bigcap C。\end{aligned}$$

对定义域 C 上的函数 f，我们可利用共轭变换得出一个定义域集合 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的共轭函数 g 使得

$$D=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n|\sup_{\boldsymbol{x}\in C}[\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle-f(\boldsymbol{x})]<+\infty\},$$

$$g(\boldsymbol{y})=\sup_{\boldsymbol{x}\in C}[\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle-f(\boldsymbol{x})],\forall\boldsymbol{y}\in D。$$

此处 g 和集合 D 均保有凸性，且满足共轭不等式：

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y}),\forall\boldsymbol{x}\in C,\boldsymbol{y}\in D。$$

对锥集 $X\subseteq\mathbb{R}^n$, 我们可定义一个对偶锥

$$Y=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\geqslant 0,\forall\boldsymbol{x}\in X\}$$

此对偶亦保有凸性。

利用共轭变换，共轭不等式及对偶锥可以推导出广义几何规划的对偶问题如下：

$$\begin{aligned}&\min \quad g(\boldsymbol{y})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{y}\in D\bigcap Y。\end{aligned}$$

这是个凸优化问题，而且

$$0\leqslant f(\boldsymbol{x}^*)+g(\boldsymbol{y}^*)$$

其中 $\boldsymbol{x}^*$ 是原问题的最优解，$\boldsymbol{y}^*$ 是对偶问题的最优解。当 $0<f(\boldsymbol{x}^*)+g(\boldsymbol{y}^*)$ 时，我们称之为存在对偶间隙。在芬切尔 (Fenchel) 假设成立下，此对偶间隙消失，亦即

$$f(\boldsymbol{x}^*)+g(\boldsymbol{y}^*)=0。$$

此时，对偶问题的最优解可提供原问题的最优解。

（执笔：方述诚　校阅：章祥荪）

半无限规划 [semi-infinite programming]　只在约束条件中含参变量的非线性规划，其数学模型是

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant 0,\ \boldsymbol{y}\in Y\end{aligned}$$

其中，$f(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 的函数，Y 为 m 维空间中的集合。由于多维参变量 $\boldsymbol{y}$ 的约束条件的复杂性，半无限规划的理论与算法的研究，目前多集中于参变量 $\boldsymbol{y}$ 为单变量的情形。半无限规划在工程技术、机器人、最优控制等方面均有应用。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

非线性互补问题 [nonlinear complementarity problem]　若 $F(\boldsymbol{x})$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个映射，非线性互补问题 (记为 NCP(F)) 是求向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，使得关系式

$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\ F(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})=0$$

成立。当 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{M}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{q}$ 为 n 维列向量时，即为线性互补问题 LCP($\boldsymbol{M},\boldsymbol{q}$)。互补问题 1964 年由美国科特尔 (R. W. Cottle) 提出，其后科特尔、丹齐格指出，线性规划与二次规划是互补问题的特例。互补问题与数学规划、变分不等式、不动点定理、对策论等有密切的关系。互补问题提出后，迅速在工程技术、经济与管理、交通、最优控制等许多领域得到广泛的应用。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

变分不等式 [variational inequality]　设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸集，求一点 $\boldsymbol{x}\in K$，使得不等式

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})\geqslant 0$$

对一切 $\boldsymbol{y}\in K$ 均成立，其中 F 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射。记变分不等式问题为 VI(K,F)，当 $K=\mathbb{R}^n_+=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{y}\geqslant 0\}$ 时，VI(K,F) 就成为非线性互补问题NCP(F)。由于变分不等式与非线性互补问题在理论研究上的重要意义与在工程技术、国民经济诸多领域的广泛应用，因此它们成为应用数学等多学科的重要研究领域。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

半定规划 [semi-definite programming]　定义在半正定矩阵锥上的线性规划，其标准形式是

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{X}\\\text{s.t.}\quad&\mathscr{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\\&\boldsymbol{X}\succeq 0。\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为 n 阶半正定矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 m 维向量。以 M_n 表示 n 阶矩阵锥，S_n 表示 n 阶对称矩阵锥，S_n^+ 表示半正定矩阵锥，即模型中 $\boldsymbol{C}\in S_n$，$\boldsymbol{X}\in S_n^+$。对于矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的弗罗贝尼乌斯内积 $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ 定义为 $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\mathrm{Trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\bullet b_{ij}$，$a_{ij},b_{ij}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的元素，亦即 $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ 等于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的对角线元素之和。$\mathscr{A}$ 是线性算子，$\mathscr{A}:S_n\to\mathbb{R}^m$，亦即

$$\mathscr{A}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\bullet\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{A}_2\bullet\boldsymbol{X}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\bullet\boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{X}\succeq 0$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 为半正定矩阵。半定规划是将线性规划中目标函数的系数向量 $\boldsymbol{c}$ 推广为对阵矩阵，变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^n$ 推广为矩阵 $\boldsymbol{X}\in S_n^+$，线性约束条件的系数向量 $\boldsymbol{a}_i$ 推广为对称矩阵 $\boldsymbol{A}_i\in S_n$。半定规划概括了许多类型的问题，包括某些凸规划问题、组合优化问题等。线性规划的多项式算法可以推广应用于半定规划，从而在组合最优化方面得到重要的应用。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

半定互补问题 [semi-definite complementarity problem]　若以 $\boldsymbol{X}$ 表示 n 阶块对角实矩阵组成的空间 (有 m 个块的大小分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 子块)，S 是 $\boldsymbol{X}$ 中对称矩阵组成的子空间。S_n^+ 是 $\boldsymbol{S}$ 中半正定矩阵组成的凸锥。半定互补问题是：寻求 $\boldsymbol{x}\in S$，使得

$$\boldsymbol{x}\in S_n^+,\ F(\boldsymbol{x})\in S_n^+,\ \langle\boldsymbol{x},F(\boldsymbol{x})\rangle=0$$

成立，其中 F 是 $S\longrightarrow S$ 的函数。半定互补问题是非线性互补问题的推广，变分不等式与非线性互补问题的许多解法可以推广应用于半定互补问题，因此在理论与应用上进一步扩大了它们的领域。

（执笔：赖炎连　校阅：修乃华）

随机规划 [stochastic programming]　目标函数或约束条件含有随机变量的数学规划问题称为随机规划问题。由于经济学或管理科学中的许多实际问题不可避免地遇到随机因素，随机规划有很大的应用价值。

对数学规划问题中的随机变量采取不同的处理原则，将导致不同类型的随机规划问题。最常用的有三类随机规划问题：分布问题，有补偿二 (多) 阶段问题和概率约束问题。如果对随机规划问题中随机变量的各个不同样本值分别求解相应的确定性数学规划问题，得到这些解之后再求这些解 (最优值或最优解) 服从的概率分布，就是所谓的分布问题；如果对随机变量的某些样本值约束条件不能满足的情形采用一些补偿措施，而补偿会造成某种利益的损失，这就是二阶段有补偿随机规划问题；如果要求满足约束条件的概率不低于某一水平，这就是概率约束规划问题。

若将随机规划问题的目标函数或约束条件中的概率或期望计算出来，则这些随机规划问题便化为等价的确定性数学规划问题。理论上讲，随机规划问题可以用确定性数学规划算法求解，但实际上，这些概率或期望都无法计算出来，必须利用专门的方法来处理。随机规划的主要研究内容就是寻找求解各类问题的行之有效的算法，并对这些算法进行相应的理论分析。

求解复杂随机规划问题的常用方法是逼近方法。具体来说，首先采用取有限多个值的离散随机变量逼近一般随机变量；然后，求解对应于离散随机变量的数学规划问题并以此解作为原问题的近似解。而随机规划的稳定性理论和灵敏度分析则是保证逼近算法有效性的理论基础。

（执笔：王金德　校阅：刘克）

分布问题 [distribution problem]　下面用线性随机规划

$$\begin{cases} Z= & \min\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

为例加以说明，其中 Z，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是随机变量。对于概率空间中的每一个样本点 $\omega\in\Omega$ 来说，我们都可以得到一个确定性的线性规划问题

$$\begin{cases} Z(\omega)= & \min\boldsymbol{c}(\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}(\omega)\boldsymbol{x}\leqslant b(\omega),x\geqslant 0。\end{cases}\tag{2}$$

对于各个不同的样本点 ω，问题 (2) 有相应的最优解 $X(\omega)$ 和最优值 $Z(\omega)$，求随机变量 $X(\omega)$ 和 $Z(\omega)$ 的概率分布或数学期望等有关值的问题称为分布问题。对于非线性随机规划问题，其分布问题是类似的。

分布问题除了它本身的存在意义外，另一个重要的作用是：有补偿二 (多) 阶段问题中每一阶段的问题都是一个分布问题。

（执笔：王金德　校阅：刘克）

有补偿二（多）阶段问题 [two (multiple) stage program with recourse]　下面用例子说明。考虑线性随机规划问题 $\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\ D_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1\}$，其中 $\boldsymbol{b}_1$ 为随机变量，由它引出的二阶段有补偿问题为

$$\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+E_{b_1}\left[\min d_1y_1|\boldsymbol{W}_1y_1+D_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1\right]\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\end{cases}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{W}_1$ 称为补偿矩阵(recourse matrix)，E_{b_1} 表示在 $\boldsymbol{b}_1$ 的概率分布下求数学期望的运算；y_1 为补偿变量。由于原线

性随机规划问题中参数 $\boldsymbol{b}_1$ 的随机性常常使约束条件 $D_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 不能得到满足，因此引进补偿量 W_1y_1，造成的损失为 d_1y_1，而使补偿损失极小化的问题被称为第二阶段问题。也可以类似地考虑一般的非线性随机规划问题的二阶段问题。如果对于 y_1 还有一些其他的约束条件，并且这些约束条件中与另一随机变量 $\boldsymbol{b}_2$ 有关，则需再引进补偿变量 y_2 并形成相应的第三阶段问题 $E\left[\min d_2^{\mathrm{T}}y_2|W_2y_2+D_2y_1=\boldsymbol{b}_2\right]$，以此类推可得一般的多阶段有补偿问题。

韦茨 (R. Wets) 证明了二阶段有补偿问题是一个凸规划问题，这对选择求解算法和理论研究很有用处。当 $\boldsymbol{b}_1$ 为取 k 个值的离散随机变量时，二阶段问题等价于一个 L 型的线性规划问题。它有 m_1+m_2k 个约束条件，其中 m_1 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，m_2 为 $\boldsymbol{W}$ 的行数。当 k 很大时，这是一个大型线性规划问题。卡尔 (P. Kall) 基于分解法给出了一个实用的求解方法。

(执笔：王金德　校阅：刘克)

概率约束问题 [probabilistic constrained problems]　典型形式为

$$\begin{cases}\quad\min f(x)\\ \text{s.t.}\quad G(x)=\Pr\{g_i(x,\xi)\leqslant 0,\quad i=1,\cdots,k\}\geqslant 1-\alpha\\ \quad h(x)\leqslant 0\end{cases}$$

其中，第一个约束条件要求可行解 x 满足条件 $g_i(x,\xi)\leqslant 0, i=1,\cdots,k$ 的概率不小于某一指定水平 $1-\alpha$ 。这种约束要求在管理科学和经济学的问题中常常是合理的、现实的。如果 $G(x)$ 的表达式可以得出，这个规划问题就是一个确定性规划问题。

在绝大多数实际问题中，或是因为 ξ 的概率分布太复杂，或是因为约束函数 g_i 太复杂而无法将 $G(x)$ 表出，求解概率约束规划的困难主要在于可行解集合的处理。普雷科保 (Prékopa) 给出了保证可行解集合为凸集的 (关于 ξ 的概率分布和 g_i 的性质的) 条件。

求解概率约束规划的方法主要有两种。一种是选用恰当的确定性非线性规划算法，在展开 $G(x)$ 和其梯度的当前值时用蒙特卡洛 (Monte Carlo) 方法; 另一种是用逼近方法，即用取有限个值的离散随机变量 ξ_n 逼近 ξ。用相应的逼近问题的解作为原问题的近似解。

(执笔：王金德　校阅：刘克)

凸函数 [convex function]　设 S是实线性空间中的一个集合。如果连接 S中任意两点的线段仍在 S中，即 $\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2\in S, \forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in S, \forall\alpha\in[0,1]$，则 S称为 X中的一个凸集。

函数 $f: X\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^1\bigcup\{-\infty,\infty\}$ 称为在 S 上的凸函数，对任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in S$ 与 $\alpha\in[0,1]$ 有

$$f(\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2)\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2)。$$

若 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$ 时，有严格的不等式成立，则 f 称为严格凸的。

凸函数不一定是可微的，但它有很多好的性质，如：① 如果 $f_i, i=1,\cdots,n$，是凸函数且 $\alpha_i\geqslant 0$，则 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i f_i$ 是凸函数; ② 如果 f 为凸函数, 则对任一给定的实数 $r, S_r=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in S, f(\boldsymbol{x})\leqslant r\}$ 是凸集；③ 如果 $f_i, i=1,2,\cdots,n$，是凸的，则 $f(\boldsymbol{x})=\max\{f_i(\boldsymbol{x})\,|\,i=1,\cdots,n\}$ 是凸的。

函数 f 称为凹函数, 如果 $-f$ 是凸的。凸函数是凸分析中研究与论述的基本对象，赫尔德 (O. L. Hölder)、延森 (J. L. W. V. Jensen) 和闵可夫斯基 (H. Minkowski) 于 20 世纪初的工作，奠定了凸函数的理论基础。

(执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪)

凸规划 [convex programming]　数学规划的一种特殊情况，此时 $\mathbb{R}^n$ 上的非线性规划问题中的目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和约束函数 $g_j(\boldsymbol{x})$，$j=1,\cdots,m$ 为凸函数，$h_i(\boldsymbol{x}), i=1,\cdots,p$, 为线性函数。即可行集合 $D=\{\boldsymbol{x}|h_1(\boldsymbol{x})=0,\cdots,h_p(\boldsymbol{x})=0, g_1(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\cdots,g_m(\boldsymbol{x})\leqslant 0\}$ 为凸集。线性规划是最简单的凸规划，或者说凸规划是保持了线性规划一些好的性质的最简单的非线性规划。这些性质包括：①卡鲁什–库恩–塔克条件 (KKT 条件) 是最优解的必要条件同时也是充分条件；② 局部最优解即是全局最优解；③ 最优解集是一个凸集。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

拟凸函数 [quasiconvex function]　设 S 是实线性空间 X 中的一个凸集，$f: X\to\mathbb{R}^1\bigcup\{+\infty\}$。若对任意两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2\in S$，有

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)\},\quad\forall\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2],$$

则称 f 为拟凸函数。这一不等式亦称延森 (Jensen) 不等式。凸函数是拟凸的。当 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可微拟凸函数时，进一步有 $\langle\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\rangle>0\Longrightarrow f(\boldsymbol{x}_1)\leqslant f(\boldsymbol{x}_2)$；当 f 是下半连续不可微函数时, 可用克拉克–罗卡费勒 (Clarke-Rockafellar) 次微分来刻画拟凸函数 f 的类似性质。函数 f 是拟凸函数当且仅当对任一 $\gamma\in R^1$，水平集 $S(\gamma)=\{\boldsymbol{x}\in X\,|\,f(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma\}$ 是凸的。

函数 f 称为严格拟凸的，是指对任何使 $f(\boldsymbol{x}_1)\neq f(\boldsymbol{x}_2)$ 成立的两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，延森不等式的严格不等式成立；函数 f 称为强拟凸的，如果对任何两点 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，有严格不等式成立。每个严格凸函数都是强拟凸函数。每个强拟凸函数都是严格拟凸函数。若 $-f$ 是拟凸函数，则函数 f 称为拟凹函数。

(执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪)

伪凸函数 [pseudoconvex function]　最初是由曼加萨里安 (Mangasarian) 于 20 世纪 60 年代中期对可微函数提

出的，后来被推广到不可微的情形。设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维实空间，S 为 $\mathbb{R}^n$ 中一凸集，$f: S \to \mathbb{R}^1 \bigcup\{+\infty\}$ 称为伪凸的，如果对任意两点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S$，$\langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}')$，或等价地，$f(\boldsymbol{x}') < f(\boldsymbol{x}) \Longrightarrow \langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\rangle < 0$。

伪凸函数 f 的局部极小点亦为其全局极小点；若 $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 是全局极小点。

若对任意不同两点 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ 有 $\langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}')$，则称 f 是 S 上的严格伪凸函数。

若 f 是伪凸函数，则它是严格拟凸函数；若 f 是严格伪凸函数，则它是强拟凸函数。

函数 f 称为伪凹函数，如果 $-f$ 是伪凸函数。

（执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪）

线性分式规划 [linear fractional programming]　线性规划的一个推广，目标函数是两个线性函数的商：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+s)/(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+t) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$，$s$、$t$ 为标量。线性分式规划有同线性规划类似的性质：① 如果有最优解存在，则必有极点最优解存在；② 局部最优解也是全局最优解。这些性质的成立在于目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的以下性质：假设在可行域上 $f(\boldsymbol{x})$ 的分母不取零值，则在可行域上 $f(\boldsymbol{x})$ 同时是伪凸函数和伪凹函数，进而是严格拟凸函数和严格拟凹函数，于是具有同线性规划相似的性质并有同单纯形法一样由可行域极点到极点的迭代算法 —— 凸单纯形法，亦称赞格威尔 (Zangwill) 方法。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

不可微最优化 [non-differentiable optimization]　在一个最优化 (数学规划) 问题中，目标函数或约束中含有不可微函数，则称为不可微优化。典型的有不可微的凸规划、利普希茨优化、下半连续函数的优化、MPEC 问题及以变分不等式为约束的优化问题等。对某些特殊类型的问题，如有限极小极大问题 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \max\limits_{i=1,\cdots,m} f_i(\boldsymbol{x})$，可转化为等价的可微约束规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{u} \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{u}, \quad i=1,\cdots,m, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

其中 $f_i, i=1,\cdots,m$, 是可微函数。

自 20 世纪六七十年代以来，不可微最优化随着控制、工程技术与科学、决策与对策论，以及经济学等研究的进展，在理论、数值计算和应用等方面已成为一个重要的研究方向。其中不可微凸规划与利普希茨优化的理论研究发展较快，相对完善，但在数值计算上仍存在众多问题。

不可微最优化与非光滑最优化的严格含义不同，前者是指梯度 (导数) 不存在，而后者是指梯度 (导数) 不连续。

（执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪）

次梯度 [subgradient]　设 $f: X \to \bar{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \bigcup\{-\infty, +\infty\}$ 为巴拿赫空间 X 上的凸函数，其中 X^* 为 X 的对偶空间，$\mathbb{R}^1$ 表示实数空间。函数 f 在 $\boldsymbol{x}$ 点处的次微分中的元素 (向量) 称为 f 在该点处的次梯度，有时也称为广义梯度。次梯度也可以独立定义为：$\boldsymbol{x}^* \in X^*$ 称为 f 在 $\boldsymbol{x}$ 处的一个次梯度，如果它满足不等式

$$f(\boldsymbol{z}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{z} \in X,$$

或等价地，满足不等式 $f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d}) \geqslant \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{d}\rangle, \forall \boldsymbol{d} \in X$, 或满足关系 $(\boldsymbol{x}^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}f}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$，其中 $\mathrm{epi}f = \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu < +\infty, \boldsymbol{x} \in X\}$ 表示 f 的上图，$N_{\mathrm{epi}f}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$ 表示 $\mathrm{epi}f$ 在 $(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$ 处的法锥。

（执笔：夏尊铨　校阅：邓乃扬）

次微分 [subdifferential]　众多不同的不可微 (非光滑) 函数类的次微分有不同的含义与形式。此处，仅就凸函数而言，它是凸分析中的基本概念之一。

设 $f: X \to \bar{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \bigcup\{-\infty, +\infty\}$ 为定义于巴拿赫空间 X 上的凸函数，X^* 为 X 的对偶空间。函数 f 在 $x \in X$ 处的次微分, 记为 $\partial f(x)$, 定义为

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(z) \geqslant f(x) + \langle x^*, z-x\rangle, \forall z \in X\}。$$

当 $f(x) \in \mathbb{R}^1$ 时，f 在 x 处存在方向导数 $f'(x;d) = \inf\limits_{\lambda>0} \lambda^{-1} (f(x+\lambda d) - f(x)) = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x+\lambda d) - f(x))$。如果 f 是正常凸函数 (至少存在一点 x 使得 $f(x) < +\infty$ 且处处 $f \neq -\infty$) 且 x 是 f 的有效域 ($\{x \mid f(x) < +\infty\}$) 的相对内点，则 $f'(x;d) = \sup\limits_{x^*\in\partial f(x)} \langle x^*, d\rangle$，且次微分 $\partial f(x)$ 还可表达为 $\partial f(x) = \{x^* \mid \langle x^*, d\rangle \leqslant f'(x;d), \forall d \in X\}$。

次微分是一个上半连续的集值映射。次微分中的元素称为次梯度，也称为广义梯度。如果 $\partial f(x)$ 非空，则称 f 在 x 处是次可微的。如果 $f, f_i, i=1,\cdots,n$，是正常凸函数，$\lambda > 0, \lambda_i > 0, i=1,\cdots,n$，则 $\partial(\lambda f) = \lambda\partial f$ 且 $\partial\left(\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) \supset \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \partial f_i$。$X = \mathbb{R}^n$ 是最优化中常考虑的情形。

（执笔：夏尊铨　校阅：邓乃扬）

凸分析 [convex analysis]　20 世纪中后期形成的，以凸集与凸函数为研究对象，以其性质、运算、微分理论、凸集与凸函数的相互关系、共轭与对偶理论、凸代数及其应用为主要研究内容的一个数学分支。

在凸分析中，定义域可扩展为全空间且函数值可取正负无穷大；以函数的上图为元素的集合与凸函数集合间的一一

对应关系是凸分析中的重要研究手段之一；凸函数在任一取有限值点处均为方向可微 (即关于每一固定方向可做一阶展开)，方向导 (函) 数关于方向是次线性的，次微分是一个上半连续的点到闭凸集集的集值映射，两者构成凸分析的微分理论的基本概念；共轭与对偶理论在凸分析中起着重要角色的作用，是论述与研究如凸集之间、凸函数之间与次微分之间的对应关系，以及极小极大等问题的基本工具。

凸分析已成为许多学科领域的基础，如数学规划、数值优化、运筹学、控制论、工程科学与技术、管理科学与工程、经济与金融、数据处理，以及生物信息学等。

(执笔：夏尊铨　校阅：邓乃扬)

非凸分析 [nonconvex analysis]　自 20 世纪六七十年代，特别是 70 年代以来逐渐形成的，以非凸集与非凸函数为对象，研究其性质、运算、集合与集值映射序列的收敛理论、微分理论、非凸集与非凸函数的相互关系、对偶理论及其应用等的一个新的数学分支。

非凸分析不同于凸分析，它涉及不同类型的函数，如已具有完整的理论体系的利普希茨函数、下半连续函数、拟/伪凸函数、D. C. 函数及拟可微函数等。变分分析 (variational analysis) 是以集值分析与上图分析为基础, 研究下半连续函数的一、二阶微分及优化问题的分析, 它是研究非凸分析的基本工具。非凸分析与最优化、平衡、控制、线性与非线性系统的稳定性、金融及许多类型的工程应用等问题密切相关。

(执笔：夏尊铨　校阅：邓乃扬)

广义梯度 [generalized gradient]　广义梯度有两种定义方式：一种是作为凸函数次微分集合中的一个元素；另一种是作为 (局部) 利普希茨函数的微分，于 20 世纪 70 年代初由克拉克 (F. H. Clarke) 提出的。目前广泛使用的是后一种定义, 它又常称为克拉克次微分。

假定 X 是巴拿赫空间且 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 在 x 附近是利普希茨的。对于利普希茨函数来说，一般地，在 x 处的方向导数可能不存在，但其函数的差商的上极限 $f^\circ(x;d) = \limsup\limits_{x'\to x,\, t\downarrow 0} t^{-1}(f(x'+td)-f(x'))$ 是存在的，称其为 f 在 x 处关于 d 的广义方向导数。它是有限的、关于 d 是正齐次的、次可加的、利普希茨的且关于 $(x;d)$ 是上半连续的。函数 f 在 x 处的广义梯度，记为 $\partial f(x)$，定义为 X^* 中的一个子集

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* \mid f^\circ(x;d) \geqslant \langle \zeta, d\rangle, \forall\, d \in X\},$$

其中 X^* 是 X 的对偶空间。$\partial f(x)$ 是 X^* 中的非空凸 弱*紧集且 $f^\circ(x;d) = \max\{\langle \zeta, d\rangle \mid \zeta \in \partial f(x)\}$。

当 $X = \mathbb{R}^n$ 时，$\partial f(x)$ 还具有下述结构

$$\partial f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{co}\{\boldsymbol{u} \mid \exists \{x_i \in T\}_{i=1}^{\infty} \to \boldsymbol{x} : \boldsymbol{u} = \lim_{x_i \to \boldsymbol{x}} \boldsymbol{\nabla} f(x_i)\},$$

其中 T 表示 f 的一个可微点集且 $\mathbb{R}^n \backslash T$ 的测度为零，$\mathrm{co}\{\cdots\}$ 表示集合 $\{\cdots\}$ 中的点构成的凸组合的全体。这是最优化理论与应用中常用的一种微分形式。对给定的 $\lambda \in \mathbb{R}^1$ 与利普希茨函数 $f: X \to \mathbb{R}^1$ 和 $f_i: X \to \mathbb{R}^1, i = 1, \cdots, n$, 有 $\partial(\lambda f) = \lambda \partial f$ 和 $\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda f_i\right) \subset \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda \partial f_i$。

(执笔：夏尊铨　校阅：邓乃扬)

拟微分 [quasi-differential]　杰米亚诺夫 (V. F. Demyanov) 和罗比诺夫 (A. M. Robinov) 于 1980 年针对不可微优化问题提出了拟可微函数的概念。至今已成为人们研究不可微优化的重要工具。

称 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是拟可微的, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是方向可微的, 并且存在一对凸紧集 $\underline{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)$, $\bar{\partial} f(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$, 使得

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{d}) = \max_{\boldsymbol{v} \in \underline{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}\rangle + \min_{\boldsymbol{w} \in \bar{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{d}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n。$$

集对 $Df(\boldsymbol{x}) = [\underline{\partial} f(\boldsymbol{x}_0), \bar{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)]$ 称为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的一个拟微分, 而集合 $\underline{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $\bar{\partial} f(\boldsymbol{x}_0)$ 分别称为函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的次微分和超微分。若 f 在开集 Ω 中的任意一点都是拟可微的, 则称 f 是 Ω 上的拟可微函数。从上面的定义易知拟微分不是唯一的, 比如集合 $[\underline{\partial} f(\boldsymbol{x}_0) + B, \bar{\partial} f(\boldsymbol{x}_0) - B]$ 也是一个拟微分, 其中 B 是任意的有界闭凸集。此外, 所有拟可微函数构成一个线性空间。

(执笔：修乃华　校阅：章祥荪)

B 可微 [B-differentiable]　鲁宾逊 (S. M. Robinson) 于 1985 年提出了 B 可微，亦称布利冈可微(Bouligand differential)的概念。如果映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处是局部利普希茨连续的，并且方向可微, 则称 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处是 B 可微的。此时, 我们称方向导数 $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{d})$ 为 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 B 导数。进一步, 如果误差函数 $e_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 满足

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2 \to \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^1 \neq \boldsymbol{y}^2}} \frac{e_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^1) - e_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^2)}{||\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{y}^2||} = 0,$$

称 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处是强 B 可微的。若 f 在开集 Ω 中的任意一点都是 B 可微的, 则称 f 是 Ω 上的 B 可微函数。

根据定义, 如果 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处是局部利普希茨连续的, 并且 F 可微, 则 f 是 B 可微的。反之, 如果 f 是 B 可微的, 并且对任意 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, 有 $f'(\cdot, \boldsymbol{d})$ 连续, 那么 f 是 F 可微的。B 可微概念的重要性在于它使得方向导数对于方向而言具有一致性, 即

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}}} \frac{f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||} = 0。$$

(执笔：修乃华　校阅：章祥荪)

共轭函数 [conjugate function] 凸分析中很多概念具有某种对称性，如凸锥与其极锥、示性函数与其支撑函数、次方向导数与次微分等。1949 年，芬切尔 (W. Fenchel) 提出了凸函数的共轭函数的概念，它很好的刻画了这些对应关系。设 $f:\mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^1 \bigcup\{-\infty,\infty\}$，其共轭函数 [或勒让德–芬切尔 (Legendre-Fenchel) 变换] $f^*:\mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ 为

$$f^*(\boldsymbol{x}^*) = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\{\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\rangle - f(\boldsymbol{x})\},$$

称 $f^{**} = (f^*)^*$ 称为 f 的双共轭函数。根据定义可得杨–芬切尔 (Young-Fenchel) 不等式, 即对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 总有 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*\rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}^*)$。对任意的函数 $f:\mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, 有 $f^{**} = \mathrm{cl}(\mathrm{con}f)$。故 $f = f^{**}$ 当且仅当 f 是闭凸函数。

以示性函数与其支撑函数为例, 我们用共轭函数来刻画它们之间的关系：① 对任意的集合 C 和正齐次函数 h, 示性函数 δ_C 的共轭函数为其支撑函数 σ_C。而函数 h 的共轭函数 h^* 恰好是集合 $\{\boldsymbol{x}|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}\rangle \leqslant h(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{v}\}$ 的示性函数。因此, 对任意的闭凸集 C, 有 δ_C 和 σ_C 互为共轭。②如果 C 是锥,C^* 为 C 的对偶锥, 那么 δ_C 的共轭函数是 δ_{C^*}。并且, 当 C 是闭凸锥时, δ_C 和 δ_{C^*} 互为共轭。

（执笔：修乃华　校阅：赖炎连）

共轭对偶 [conjugate dual] 众所周知, 利用线性规划的对偶规划来研究原规划的诸多性质并设计算法进行求解是一条极为有效的途径。对于非线性规划, 如何给出相应的对偶规划并使得它与原问题之间具有类似线性规划与其对偶规划的关系? 1970 年，罗卡费勒 (R. T. Rockafellar) 通过研究原问题的扰动问题, 建立了共轭对偶。亦称罗卡费勒对偶 (Rockafellar dual)。

称规划问题 (P) : $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$ 为原问题。设 $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^1\bigcup\{-\infty,\infty\}$ 满足 $\varphi(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, 则问题 (P) 的共轭对偶为 (D) : $\max\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} -\varphi^*(0, \boldsymbol{y})$，此处 φ^* 是 φ 的共轭函数。

利用共轭函数与其原函数的关系, 下述结论成立：

弱对偶定理(weak duality theorem)对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$, 有 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant -\varphi^*(0, \boldsymbol{y})$, 故

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \geqslant \max_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} -\varphi^*(0, \boldsymbol{y})。$$

强对偶定理(strong duality theorem)如果 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^m$ 分别为原问题(P)和对偶问题(D)的最优解, 并且它们的最优值相同, 则

$$f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \varphi^*(0, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0。$$

反之, 如果存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^m$ 使得上式成立, 那么 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 分别为原问题和对偶问题的最优解, 并且对偶间隙为零。

（执笔：修乃华　校阅：赖炎连）

局部最优解 [local optimal solution] 考虑非线性规划问题：

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{x}\in D$$

或

$$\max f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{x}\in D$$

若对可行域 D 中的一点 $\bar{\boldsymbol{x}}$，存在有一个非零半径的邻域 N，使对任意 $\boldsymbol{x}\in N\bigcap D$, $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant f(\boldsymbol{x})$ 或 $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant f(\boldsymbol{x})$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为一个局部最小值解或局部最大值解，或统称为局部最优解。若上式中严格不等式成立，则称该点为严格局部最优解。产生多个局部最优解的可能来自两个方面，一是目标函数本身有多个局部极值，二是由约束造成，或两者兼有之。由约束造成多个局部最优解的典型例子是反凸问题(reverse convex programming)，即非线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad g_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \cdots, g_m(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

此处 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g_j(\boldsymbol{x})$ 均为凹函数。值得一提的是，在数学规划，特别是非线性规划的算法研究中，大部分有理论根据的算法是求局部最优解的方法。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

全局最优解 [global optimal solution] 考虑非线性规划问题：

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{x}\in D$$

或

$$\max f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{x}\in D$$

若对可行域 D 中的一点 $\bar{\boldsymbol{x}}$，对任意 $\boldsymbol{x}\in D$, $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant f(\boldsymbol{x})$ 或 $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant f(\boldsymbol{x})$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为一个全局最小值解或全局最大值解，或统称为全局最优解。若上式中严格不等式成立，则称该点为严格全局最优解。对于某些特殊类型的非线性规划，例如凸规划，局部最小值就是全局最小值。大部分非线性规划问题为非凸规划，有多个局部最优解，其中有一些为全局最优解。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

全局最优化 [global optimization] 亦称总体最优化。对非线性规划问题，欲求出其全局最优解。当问题有多个局部最优解时，这是一个比求出局部最优解困难得多的问题。根本的困难在于关于全局最优解，我们没有在数学分析意义上的关于解的必要、充分条件的描述。全局最优化算法的研究有两个方向：随机型算法和确定型算法。随机型算法的原理是逐步排除不可能是全局最优解的局部最优解，以概率收敛到全局解。这类算法适合于解由目标函数自身有多个局部极值而导致的全局最优化问题，但解问题的收敛速度较慢。由约束造成多个局部极值的全局最优化问题，往往会有可利用的问题结构，于是引起对确定型算法的讨论。经常讨论的确

定型全局最优化模型有反凸问题 (见局部最优解) 和 DC 规划问题。后者是以下非凸问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})$ 均为凸函数。这两类问题多有许多实际应用。确定型模型的算法常常归结到割平面法、分枝定解法和凸包络法等。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

最优性条件 [**optimality condition**]　连续最优化 (见最优化) 中的一个术语。当目标函数和约束函数可微时，用其一阶、二阶微分来描述局部极值点要满足的条件。最优性条件分为充分条件和必要条件，同时具充分性和必要性的条件称为充分必要条件。最优性条件还可以以其用到的导数阶数来命名，例如一阶最优性条件和二阶最优性条件。最著名的一阶最优性必要条件是卡鲁什–库恩–塔克条件。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

库恩–塔克条件 [**Kuhn-Tucker conditions**]　非线性规划问题之局部解的必要条件。对于一个约束优化问题的可行点 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $p+m$ 个实数 $\mu_i^*(i=1,\cdots,p)$ 和 $\lambda_i^*(i=1,\cdots,m)$ 使得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \boldsymbol{\nabla} h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \boldsymbol{\nabla} g_i(\boldsymbol{x}^*), \\ &\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \quad \lambda_i^* \geqslant 0, \qquad i=1,\cdots,m, \end{aligned}$$

我们就称在 $\boldsymbol{x}^*$ 处库恩–塔克条件成立，相应的 $\mu_i^*(i=1,\cdots,p)$ 和 $\lambda_i^*(i=1,\cdots,m)$ 称为拉格朗日乘子。库恩–塔克条件简称为 K-T 条件。可证明，在非线性规划问题的任一局部解处，如果约束规格条件满足，则库恩–塔克条件一定成立。库恩–塔克条件说明非线性规划问题的解一般都是拉格朗日函数的鞍点。

即使不假定约束规格条件，在非线性规划问题的局部解 $\boldsymbol{x}^*$ 处，必存在 $p+m+1$ 个实数 $\mu_i^*(i=1,\cdots,p)$ 和 $\lambda_i^*(i=0,1,\cdots,m)$ 使得

$$\begin{aligned} &\lambda_0^* \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \boldsymbol{\nabla} h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \boldsymbol{\nabla} g_i(\boldsymbol{x}^*), \\ &\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \quad \lambda_i^* \geqslant 0, \qquad i=1,\cdots,m, \\ &\sum_{i=0}^{p} (\mu_i^*)^2 + \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i^*)^2 \neq 0, \quad \lambda_0^* \geqslant 0。 \end{aligned}$$

这些条件称为广义的库恩–塔克条件。

之所以把这些条件称之为库恩–塔克条件是由于库恩和塔克 1951 年所发表的著名文章，该文章被广泛认为是非线性规划的奠基性文章。但事实上，克鲁什 (Karush) 早在 1939 年就在其硕士论文中就已经讨论过这些条件，所以库恩–塔克条件也被称为克鲁什–库恩–塔克条件 (Karush-Kuhn-Tucker conditions)，简称为 K-K-T 条件。

(执笔：袁亚湘　校阅：章祥荪)

库恩–塔克点 [**Kuhn-Tucker point**]　满足库恩–塔克条件的点称为库恩–塔克点。确切地说，如果在 $\boldsymbol{x}^*$ 处库恩–塔克条件成立，我们就称 $\boldsymbol{x}^*$ 是一个库恩–塔克点。对于一个库恩–塔克点 $\boldsymbol{x}^*$, 必存在相应的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 使得库恩–塔克条件成立。我们称 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 是库恩–塔克对，它是拉格朗日函数的稳定点。

库恩–塔克点亦称为克鲁什–库恩–塔克点 (Karush-Kuhn-Tucker point)，简称为 K-T 点或 K-K-T 点。

(执笔：袁亚湘　校阅：章祥荪)

约束规格 [**constraint qualification**]　亦称约束品性。对于非线性优化问题，卡鲁什–库恩–塔克条件(KKT 条件) 是最优性的基本条件与求解准则。保证该条件成立的各种条件称为约束规格。以下是两种典型的常用的约束规格，假定所有约束函数连续：① 线性无关约束规格：对某一可行点，所有有效约束函数在该点的梯度向量为一线性无关集；② 斯莱特约束规格(Slater condition)：考虑只有不等式约束的非线性最优化问题，对可行点 x，相应的有效约束函数在该点处为伪凸函数，并存在点 $\overline{x}$，使对所有有效约束函数有 $g_j(\overline{x}) < 0$。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

拉格朗日乘子 [**Lagrange multiplier**]　非线性规划的经典理论同数学分析中的拉格朗日乘子理论紧密相关。另外, 最优化问题还同鞍点问题相关。对一个非线性规划问题，拉格朗日函数定义为

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x}),$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$ 分别为非线性规划问题中的目标函数、不等式约束函数组和等式约束函数组，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p$ 称为拉格朗日乘子。关于 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$, 以下方程组称为拉格朗日乘子方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v} = 0; \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0; \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = h(\boldsymbol{x}) = 0; \\ \boldsymbol{u} \leqslant 0; \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x}) = 0。 \end{cases}$$

最后一个方程称为互补松弛条件(complementary slackness condition)。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

拉格朗日鞍点 [**Lagrange saddle point**]　拉格朗日

鞍点问题是这样定义的：求 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n, \bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$ 且 $\bar{\boldsymbol{u}} \geqslant 0, \bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^p$，使

$$L(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) \leqslant L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$$

成立，此处 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 为拉格朗日函数。鞍点的概念同对策论中两人对策紧密相关，若将定义中的变量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 看成一个向量 $\boldsymbol{y}$，令 $\bar{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$，$\bar{L}$ 就是对策的目标函数，一个对策人关于 $\boldsymbol{x}$ 求 $\bar{L}$ 的极小，而另一人求关于 $\boldsymbol{y}$ 的极大。这种极小极大化模型在经济中应用很广，冯・诺依曼 (von Neumann) 建立了有关的数学基础理论。对策论的理论对线性规划、进而对非线性规划的对偶理论有很大的促进作用。一个非线性规划问题是否有解，可以用拉格朗日函数的鞍点是否存在来描述。值得指出的是，同前者不一样，鞍点问题的表达不需要对函数作可微性的假设，于是可以适应更广一类的函数，包括离散的函数。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

收敛阶 [order of convergence]　收敛阶是衡量点列收敛速度的度量。主要有两种收敛阶，一种是 Q 收敛阶，另一种是 R 收敛阶。

设点列 $\boldsymbol{x}_k$ 收敛于 $\boldsymbol{x}^*$，令 $\epsilon_k = ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*||$ 对于 $p \in [1, +\infty)$，我们称

$$Q_p = \limsup_{k\to\infty} \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k^p}$$

为点列 x_k 的商收敛因子，亦称 Q 因子；称

$$R_p = \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} \ \epsilon_k^{1/k}, & \text{若 } p = 1; \\ \limsup\limits_{k\to\infty} \ \epsilon_k^{1/p^k}, & \text{若 } p > 1 \end{cases}$$

为 x_k 的根收敛因子，简称 R 因子。称

$$O_Q = \inf\{p \mid p \in [1, +\infty) \text{ 且 } Q_p = +\infty\}$$

为点列 x_k 的商收敛阶，简称 Q 收敛阶；称

$$O_R = \inf\{p \mid p \in [1, +\infty) \text{ 且 } R_p = 1\}$$

为点列 x_k 的根收敛阶，简称 R 收敛阶。

一般说来，点列的收敛阶越高，其收敛速度就越快。

(执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹)

线性收敛 [linear convergence]　对于收敛点列 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}^*$，如果其 Q 因子 Q_1 满足 $0 < Q_1 < 1$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 Q 线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$；如果 $Q_1 \geqslant 1$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 Q 次线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$。如果收敛点列 $\boldsymbol{x}_k$ 的 R 因子 R_1 满足 $0 < R_1 < 1$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 R 线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$；如果 $R_1 = 1$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 R 次线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$。一个点列如果 Q 线性收敛就一定 R 线性收敛，但反之不然。

通常，线性收敛是指 Q 线性收敛，它等价于

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*||}{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*||} < 1。$$

(执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹)

超线性收敛 [superlinear convergence]　对于收敛点列 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}^*$，如果其 Q 因子 Q_1 满足 $Q_1 = 0$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 Q 超线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$；如果其 R 因子 R_1 满足 $R_1 = 0$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 R 超线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$。一个点列如果 Q 超线性收敛就一定 R 超线性收敛，但反之不然。

通常，超线性收敛是指 Q 超线性收敛，它等价于

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*||}{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*||} = 0。$$

(执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹)

二次收敛 [quadratic convergence]　对于收敛点列 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}^*$，如果其 Q 因子 Q_2 满足 $0 < Q_2 < +\infty$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 Q 二次收敛于 $\boldsymbol{x}^*$；如果其 R 因子 R_2 满足 $0 < R_2 < 1$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 是 R 二次收敛于 $\boldsymbol{x}^*$。一个点列如果 Q 二次收敛就一定 R 二次收敛，但反之不然。

通常，二次收敛是指 Q 二次收敛，它等价于

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*||}{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*||^2} < \infty。$$

二次收敛也称为平方收敛。

(执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹)

马拉托斯效应 [Maratos effect]　约束优化方法中的一个著名现象，指一个好点 (超线性收敛的点) 不能被罚函数接受。考虑在约束条件 $u - v^2 = 0$ 下求目标函数 $3v^2 - 2u$ 的极小，显然该问题的最优解是 $\boldsymbol{x}^* = (0,0)^{\mathrm{T}}$。对充分小的 $\epsilon > 0$，比较点 $\bar{\boldsymbol{x}}(\epsilon) = (u(\epsilon), v(\epsilon))^{\mathrm{T}} = (\epsilon^2, \epsilon)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}(\epsilon) = (-\epsilon^2, 0)^{\mathrm{T}}$。我们有二次收敛性 $||\hat{\boldsymbol{x}}(\epsilon) - \boldsymbol{x}^*||_2^2 = O(||\bar{\boldsymbol{x}}(\epsilon) - \boldsymbol{x}^*||_2^2)$。但是，在点 $\hat{\boldsymbol{x}}(\epsilon)$ 处目标函数值和约束违反度分别比在点 $\bar{\boldsymbol{x}}(\epsilon)$ 处的目标函数值和约束违反度要大，故大多数罚函数在 $\hat{\boldsymbol{x}}(\epsilon)$ 处的取值要比在 $\bar{\boldsymbol{x}}(\epsilon)$ 的取值要来的大。从而，$\hat{\boldsymbol{x}}(\epsilon)$ 虽然是二阶收敛步但不能被接受。

此效应最早是由马拉托斯 (Maratos) 在其 1978 年的博士论文中所提出的，因而得其名。

(执笔：袁亚湘　校阅：赖炎连)

灵敏度分析 [sensitivity analysis]　数学规划的灵敏度分析的研究，始自丹齐格 (G. Dantzig) 针对线性规划模型的初始数据不确定、不精确或可能有所变化所引起的后果的进一步的研究。对于这一类工作，散见于文献中的有 “灵敏度分析 (sensitivity analysis)”、“优化后灵敏度分析 (postoptimal sensitivity analysis)”、“微分灵敏度分析 (differential sensitivity analysis)”、“参数灵敏度分析 (parametric sensitivity analysis)”、“稳定性分析 (stability analysis)”、“微分稳定性分析 (differential stability analysis)”、“扰动分析 (perturbation analysis)” 等称谓。对于什么是灵敏度分析，尚没有一个统一的一般性的定义。一般认为，灵敏度分析有下列两项含义：①研究部分或全部初始数据的微小变化对于最优解的影响，比如相应的最优解的变化是否也很微小，是否可以得出初始数据的误差限同相应的最优解的误差限的某种量的关系，甚至在局部意义下解随数据变化的某种近似规律；② 研究为保持最优解或其某项特性 (比如线性规划中同最优解相关联的最优基) 不变，某些初始数据的容许变化范围。此两项含义分别称作“扰动分析”和“判别区域 (critical region)”。

(执笔：刘宝光　校阅：章祥荪)

17.2 线 性 规 划

线性规划 [**linear programming**]　目标函数和约束条件都是线性函数的*数学规划*模型，它的理论构成了数学规划理论的基础，其应用遍及经济、商业、工业、农业、军事等各业以至日常生活中，涉及计划、设计、管理控制及评价等过程，可以说是最重要的优化模型。线性规划数学表达的规范型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

此处 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$。经常用的还有线性规划的标准型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

线性规划的雏形 (线性不等式组的求解) 最早出现在傅里叶 (Fourier)1823 年的工作中，后来一些有名的学者如俄罗斯的经济学家列昂惕夫 (W. Leontief) 在 1933 年、康托罗维奇 (L. Kantorovich) 在 1939 年、美国数学家冯 • 诺依曼 (von Neumann) 于 1928 和 1937 年都有过相关的工作，但它的完整的模型、理论和算法是丹齐格 (G. B. Dantzig) 在第二次世界大战中在军事计划活动上成功的应用以后于 1947 年首次提出的。他首次在线性不等式组上加上了目标函数而形成了线性规划的概念并提出了著名的*单纯形法*。

同年，冯 • 诺依曼 (von Neumann) 基于他奠基的博奕论，发展了对偶线性规划的理论。线性规划由查尼斯 (Charnes) 等于 1952 年应用于石油工业上产生了远比原来应用在军事上大得多的影响。它的第一个商业软件由兰德公司在 1954 年发布。科特尔 (R. Cottle) 和丹齐格在 1962 年提出互补转轴理论这一影响到数学规划其他分支发展的理论。1970 年克莱 (V. Klee) 和明蒂 (G. Minty) 指出经典的单纯形法在最坏情形下需要指数阶的迭代步骤，1978 年俄罗斯数学家哈奇杨 (L. G. Khachian) 提出了多项式时间的椭球法，卡玛卡 (N. Karmarkar) 在 1984 年提出的*内点法*是多项式时间线性规划算法的重要改进，可以有效地求解实际的线性规划问题。

线性规划仍然还有重大的理论问题没有解决, 例如, 是否存在基于线性规划约束条件数和变量数的强多项式算法？这些问题的解决将推动新世纪数学的发展, 被美国数学家斯梅尔 (S. Smale) 列入二十一世纪 18 个公开数学难题之一。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

凸多面体 [**convex polyhedron**]　由有限个闭半空间的交形成的集合称为凸多面体，即有限多个仿射不等式组的解集 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m\}$。非空有界的凸多面体称为多胞形。当 $\boldsymbol{b} = 0$ 时，凸多面体称为凸多面体锥。极点、棱与极方向构成凸多面体的基本要素。凸多面体在线性规划与约束为凸多面体的非线性规划中有着重要的作用。

(执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪)

基变量 [**basic variable**]　对 m 个约束方程、n 个变量 $(n \geqslant m)$ 的线性方程组

$$x_1\boldsymbol{A}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{b}$$

此处 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$，$\boldsymbol{b}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的向量。若 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ 中的 m 个向量 $\boldsymbol{A}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{A}_{i_m}$ 线性独立构成一个基，则称相应变量 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ 为一组基变量，其余变量称为非基变量。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

基础可行解 [**basic feasible solution**]　对线性规划的标准型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{B}$ 为一组*基变量*对应的一个基，并有 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为线性规划对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个基础可行解，其中 $\boldsymbol{0}$ 为 $(n-m)$ 维零向量。

(执笔：章祥荪　校阅：赖炎连)

极点 [**extreme point**]　设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集，点 $\boldsymbol{x} \in S$ 是 S 的一个极点当且仅当不存在 $\lambda \in (0, 1)$ 及 S 中的不同两点 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 使得 $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 成立，即点 $\boldsymbol{x} \in S$ 是一个极点当且仅当它不是 S 中的任一线段的内点。极点又称为顶点。

极点是线性规划的重要概念之一。有界凸集 S 中的每一点都可表示为它的极点的凸组合。如果线性规划问题的可行域有界，则：① 可行域的极点是线性规划问题的基 [本] 可行解；② 最优值必在它的某一极点上达到。

（执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪）

极方向 [extreme direction]　凸集 S 的凸子集 S' 称为 S 的一个面，如果 S' 含有 S 的任一闭线段中的一个相对内点，则整个闭线段都含于 S' 中。如果 S' 是 S 的一个半 [直] 线面，则它的方向称为 S 的极方向。凸集 S 的一个极方向可以理解为它在无穷远处的一个极点，可以在高一维的空间中作出一个直观解释。当 S 是一个凸锥时，它的棱 (边，极射线) 就是半 [直] 线面，而且它的棱同凸锥 S 的极方向是一一对应的。

（执笔：夏尊铨　校阅：章祥荪）

单纯形法 [simplex method, simplex algorithm]　由丹齐格 (G. B. Dantzig) 在 1947 年提出的解线性规划的有效算法。在几何上，线性规划的可行域是一个凸多胞形，由凸函数在凸集上取极值的性质，目标函数的极值必在凸多胞形的极点上达到。由于给定凸多胞形的极点数是有限的，单纯形法的思想是由某一极点出发，同其在多胞形上相邻的极点作目标函数值的比较，取更优的值作为解。对于非退化的问题，每次相当于在初始极点所在的单纯形中作极点值比较，由一个极点移动到更优的极点，也相当于由一个单纯形到另一个邻接的单纯形。这一迭代过程在数学上由单纯形表来完成。

单纯形法是非常有效的算法，但它不是多项式算法，因而产生了对解线性规划的多项式算法的研究和开发（见线性规划）。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

单纯形表 [simplex tableau]　对线性规划的标准型：

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

记一个基础可行解的基为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 其余的列为 $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{N})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{N}=(n^1,\cdots,n^{n-m})$，相应地，记 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}})$。有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}\\&=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}})+\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}\\&=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}\end{aligned}$$

这是一个很重要的式子，说明了对一个非基变量，仅当量 $(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$ 为负时，才有可能变成新的基变量。这些系数在下面的单纯形表中称为判别数或检验数。当 $(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$ 全部大于等于零时，已经是最优基。对基 $\boldsymbol{B}$，以下的表称为单纯形表：

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (目标函数值)	$\boldsymbol{0}$ (基变量判别数)	$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}-\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ (非基变量判别数)
$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (基础可行解基变量值)	$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{I}$ (基变量对应的单位矩阵)	$\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ (非基变量对应的约束矩阵)

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

修正单纯形法 [revised simplex method]　将经典单纯形表从减少计算机存储量的角度加以简化后的单纯形算法。此时单纯形表变成

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (目标函数值)	$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$
$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (基础可行解基变量值)	$\boldsymbol{B}^{-1}$

可以看出，对 m 个约束、n 个变量的线性规划，原来的单纯形表的大小为 $(m+1)(n+1)$；修正单纯形法的表的大小为 $(m+1)^2$。而修正单纯形法计算的过程原则上与单纯形法保持一致。设 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 为由基 $\boldsymbol{B}$ 换基后得到的新的基矩阵。由于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 的元素只有一列不相同，因而矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}$ 及其逆的各列只有一列为非单位向量列。由已知 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 及公式 $\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，不难求得 $\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}$ 及上表中相应于 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 的各值。该算法的主要运算为矩阵求逆，因而也称逆矩阵单纯形法。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

对偶线性规划 [dual linear programming]　最优化领域的重要概念，最早由冯・诺依曼 (von Neumann) 提出。线性规划的对偶及其与原规划紧密的内在关系于 20 世纪 40 年代末由丹齐格 (G. B. Dantzig) 与塔克 (A. W. Tucker) 等研究。对于标准型的线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

此处 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,$b\in\mathbb{R}^m$，存在以下的线性规划

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

与之对应，此处 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$，称为对偶线性规划，原来的规划称为原 [线性] 规划(primal linear programming)。对偶的意义

有三个层次：最简单的是形式上的对称。这一点对取一般形式的线性规划最为明显。设原规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a} \\ & \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}\leqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}\text{任意} \end{aligned}$$

其对偶规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{v}\leqslant 0,\ \boldsymbol{u}\text{任意} \end{aligned}$$

其次是对偶的互反性，即对偶规划的对偶又回到原规划。这种性质称为对称对偶。对偶的最深刻的体现是*线性规划对偶定理*。线性规划的对偶在非线性规划中有多种推广，如利用拉格朗日函数定义的沃尔夫 (Wolfe) 对偶、罗卡费勒 (Rockafellar) 共轭对偶等。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

线性规划对偶定理 [duality theorem of linear programming]　*线性规划*(LP) 的任一可行解 $\boldsymbol{x}$ 与对偶规划 (DP) 的任一可行解 $\boldsymbol{u}$ 之间有以下关系，二者对应的目标函数值有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$，且原问题 LP 或 DP 之一有有限最优解时，则另一个亦有有限最优解，且它们的最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 与 $\boldsymbol{u}^*$ 的最优目标函数值 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^*$。若其中一个无有限最优解，则另一个没有可行解。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

对偶间隙 [duality gap]　若原规划问题的最优目标函数值 $\boldsymbol{f}^*$ 与对偶规划的最优目标函数值 $\boldsymbol{z}^*$ 之差不等于零时，称为存在对偶间隙。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

对偶单纯形法 [dual simplex method]　*单纯形方法*是从一个可行基础解开始进行换基迭代计算，使判别条件即检验数由不满足最优性条件逐步改进并直到满足而得到最优解。对偶单纯形方法，则由检验数满足最优性但不满足可行性的基础解开始进行换基迭代，在每一步迭代保持最优性条件成立的条件下，使基础解最终满足可行性，从而获得最优解。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

原始对偶算法 [primal-dual method]　设 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{w}^*$ 分别为原始问题 (P)：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\quad (\boldsymbol{b}\geqslant \boldsymbol{0}) \\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

与其对偶问题 (D)：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{w}\boldsymbol{b} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{w}\boldsymbol{A}\leqslant \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

的可行解。若它们满足互补松弛条件

$$(\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}=0,$$

则 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{w}^*$ 分别为 (P) 与 (D) 的最优解。

线性规划的原始对偶算法就是根据上述性质，寻找满足保持可行性及互补松弛条件的 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的算法。先从 (D) 的任一对偶可行解 $\boldsymbol{w}$ 开始，定义关于 $\boldsymbol{w}$ 的指标集 $Q=\{i|\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}_i-c_i=0,1\leqslant i\leqslant n\}$，$\boldsymbol{a}_i\in\mathbb{R}^m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列向量。作辅助规划 (AP)：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{1}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}\geqslant 0,\ \boldsymbol{y}\geqslant 0, \\ & x_i=0,\ i\notin Q, \\ & x_i\geqslant 0,\ i\in Q\text{。} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$ 为人工变量，$\boldsymbol{1}=(1,1,\cdots,1)$。其对偶规划 (D-AP) 为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{u}\boldsymbol{a}_i\leqslant 0,\ i\in Q, \\ & \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{1}\text{。} \end{aligned}$$

算法的步骤是先解 (AP)，得解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。若 $\boldsymbol{y}=0$，则 $\boldsymbol{x}$ 为原始问题 (P) 的解，否则解 (D-AP) 得 $\boldsymbol{u}$，若 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{a}_i\leqslant 0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则原始问题 (P) 无解。否则，利用 $\boldsymbol{x}$ 求得一个使 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{b}$ 值增加的新的对偶可行解 $\boldsymbol{w}$，再计算新的集合 Q，重复上述过程。算法过程始终保持原始与对偶的可行性与互补松弛性。在非退化条件下，可在有限步求得原始问题 (P) 的解 $\boldsymbol{x}^*$。该算法是解网络流问题出现的有效方法，其后发展为线性规划的一般性方法。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

影子价格 [shadow price]　由线性规划的对偶原理可知，线性规划最优解对应的最优效益值 z^* 等于各资源量 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与对应的最优对偶解 $u_i^*(i=1,2,\cdots,m)$ 的乘积之和，即 $z^*=\sum\limits_{i=1}^{m}b_iu_i^*$。若将 b_i 视作变量时，最优效益值 z^* 也随之变化，$u_i^*=\dfrac{\partial z^*}{\partial b_i}$ 就是资源 b_i 变化时，使效益

z^* 增加的贡献率，亦即 b_i 增加一个单位时，z^* 的增加值。它称为资源 b_i 的影子价格，这个数值不是资源的市场价格，而是使用该资源的边际效益值。影子价格最早由前苏联数学家康托罗维奇 (Kontorovich) 研究并应用于经营决策分析。其后，科普曼斯 (Koopmans) 又独立提出与研究，并应用于生产活动分析，他们的研究揭示了影子价格的经济意义，为企业经营决策提供了科学依据，并提出了生产决策可以分散化的重要论断。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

运输问题 [**transportation problem**]　设某种物资有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 和 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，其产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，销量需求分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。假定任一产地 A_i 可向任一销地 B_j 运送物资，已知每吨物资的运费为 c_{ij}，问应如何调运物资满足需求并使总费用最小？当 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 时，称为产销平衡问题，否则为产销不平衡问题。运输问题是一类特殊的线性规划问题，20 世纪 30 年代末，最早由康托罗维奇 (Л. В. Канторович) 和希契科克 (F. L. Hitchcock) 等进行研究，因而也称为康托罗维奇–希契科克问题。但运输问题的表上作业法、原始对偶算法等有效解法是在 50 年代才获得的。据统计，在用线性规划解决的实际问题中，70% 以上属于运输问题类型。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

希契科克方法 [**Hitchock method**]　不使用单纯形表解产销平衡的运输问题的特殊单纯形法，亦称表上作业法。对于 m 个产地、n 个销地的问题，画出标明产地至销地的运价和相应变量运量的 $m \times n$ 矩阵的表格。每个格子称为顶点格子，依问题模型的结构，可以证明：单纯形方法的基础可行解在表格中的特征是，在基变量的顶点格子之间不存在由水平与垂直连线联成的闭合回路，而任一非基变量的顶点格子与基变量格子必存在闭合回路。据此可根据基础可行解分别计算非基变量的检验数，并用相应于单纯形转轴运算的闭回路调整运量值，改进基础可行解直至求得最优解。这一方法于 1951 年由丹齐格 (G. B. Dantzig) 提出。后经人们改进、完善，是适用于中小型问题并能直接在运价表上实现调整计算的一个简便易行的方法，它也可推广应用于产销不平衡的问题。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

图上作业法 [**graphical method for transportation**]　是从实践中总结出来的直观的运输问题的解法。将发点、收点、中间点、运输路线都画在一张交通图上，在一个运输方案的各个运送物资的路段上，标明运送物资的数量并以箭头表示流向，计算调整就在表示运输方案的物资调运流向图上进行。最优调运方案的充分必要条件是：①任一路段上没有对流；②在交通图的每一个圈上，正反方向的物资流向的长度 (路程或里程) 都不超过圈长的一半。这一简单易于普及的方法是 20 世纪 50 年代初由我国物资调运工作者在大量实践的基础上提出的，50 年代末由中国科学院数学研究所给出最优性的理论证明。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

分配问题 [**assignment problem**]　给定一定数量的工人和同样数量的任务，每个工人执行一项任务会产生相应的效益，如何给每个工人分配一项任务，使得每项任务都有工人完成且产生的总效益最高？这个问题称为分配问题，亦称线性分配问题。除此之外，还有线性瓶颈分配问题、二次分配问题等。分配问题有着广泛的实际应用，除了经典的工人–任务或者机器–工件的分配以外，还可以应用到机组和航线的分配、校车和路线的分配等很多方面。

匈牙利算法是解决线性分配问题的众多算法之一，它是库恩 (H. Kuhn) 应用匈牙利数学家柯尼希 (D. König) 和埃格瓦里维瑞 (J. Egerváry) 的理论研究成果，提出的一个多项式时间算法。另外，分配问题是运输问题的一个特例，进而也是最小费用流问题的特例，因此求解最小费用流问题和运输问题的算法，例如表上作业法等均可以用来求解分配问题。

(执笔：杨晓光　校阅：刘克)

背包问题 [**knapsack problem**]　今有一个容积为 V 的背包，有 n 个体积分别为 $v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 使用价值分别为 c_i 的物品拟装入背包，问应选择哪几种物品使它们既能装入背包又使物品的总使用价值最大。

令 x_i 为 0-1 变量，定义如下：

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{选第 } i \text{ 件物品装入背包；} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

则该问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leqslant V。\\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n。\end{aligned}$$

这是只有一个约束的简单零一整数规划，但仍是 NP 难的问题。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

整数规划 [**integer programming**]　变量取整数的线性规划，即求解

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}\text{为整数向量} \end{aligned}$$

线性规划有多项式算法，而整数规划一般不存在多项式算法, 属于NP 难的问题。只在某些特殊情况下, 例如 $\boldsymbol{A}$ 为全幺模矩阵、 $\boldsymbol{b}$ 为整数向量时，可将整数约束去除从而有多项式算法。由于整数规划解的组合性质，目前还缺少类似于非线性规划中关于解的充要条件的定性分析，因而对精确的但非枚举性的算法的设计带来了困难。常用的方法有分枝定界方法和割平面法。分枝定界方法是将问题逐步分解成容易解决的子问题，一个具体的算法例子可见零一整数规划。

解整数规划时常常用到松弛线性规划的概念，就是去除整数约束后的线性规划。解松弛线性规划得到的最优值是原整数规划最优值的一个下界。若松弛线性规划的最优解是整数解，则就是原问题的解。

整数规划是一种统一的模型，许多组合优化问题可以用整数规划来表达。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

混合整数规划 **[mixed integer programming]**　在一个整数规划中，只有部分变量限定取整数， 称为混合整数规划。混合整数规划大量出现在运筹学的实践中，例如在交通运输、 制造业、生产调度中，原因是实际问题中有些变量可以不取整数以减小问题的困难度。混合整数规划的解法是整数规划的解法的推广和灵活应用。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

零一整数规划 (0-1 整数规划) **[zero-one integer programming]**　一类最简单的整数规划，即变量仅取 0 或 1，

$$\begin{aligned}&\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}\text{为 (1，0) 向量}\end{aligned}$$

背包问题是一个典型的零一整数规划。零一整数规划可用分枝定界方法来解, 方法可简单叙述如下。设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个 0-1 整数变量，记原问题为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 它的松弛线性规划为 $LP(x_1,\cdots,x_n)$：

$$\begin{aligned}&\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant 0,\end{aligned}$$

记其最优解值为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。第一步，解两个子问题 $P(0,x_2,\cdots,x_n)$， $P(1,x_2,\cdots,x_n)$ 的松弛线性规划 $LP(0,\cdots,x_n)$，$LP(1,\cdots,x_n)$，若其最优解值为 $f(0,x_2,\cdots,x_n)$，$f(1,x_2,\cdots,x_n)$，且两个解均为整数解，则其中小的一个即为最优解；若其中有一个是整数解且对应最优值小于或等于另一子问题的最优值，则该整数解就是原问题的最优解。以上情形均不满足时，对最优值较小或小于已有整数解值、且解为非整数的子规划进行对第二个变量的分解。以下步骤的原理是相同的，具体的算法常采用不同的技巧。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

全幺模矩阵 **[totally unimodalar matrix]**　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为全幺模矩阵, 是指它的任一方子矩阵的行列式值为 ±1。若方程组中系数矩阵为全幺模矩阵，右端为整数向量，则该方程组的任一基础解均为整数解。这一性质用来检查一个整数规划能否有多项式算法。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

戈莫里割平面法 **[Gomory cut plane method]**　由戈莫里 (R. E. Gomory) 于 1958 年提出的求线性规划整数最优解的方法。该方法的理论依据是，整数可行解的最小闭包也是凸多面体或称整点凸包，以此多面体为约束区域解此线性规划，必可得到原线性规划的整数最优解。方法的主要步骤是，先求得原规划的无整数要求的最优解，若为整数解，问题已解决。否则在最优单纯形表中，取一非整数基变量对应的方程，称为诱导方程，将该方程中各变量的系数分解成不超过它的最大整数与真分数之和，按整数部分与分数部分的整数性质可导出割平面不等式，将此不等式加入原问题的最优单纯形表中，用对偶单纯形方法求解。只要所得最优解还有非整数分量，则重复上述步骤，直到求出整数最优解。步骤中，每加入一个割平面不等式，原约束区域被割去一部分，但整数可行解未被割去。由于加入的割平面随步骤增加，因此问题规模随之增大，计算量增加，收敛速度较慢，但此方法有理论意义。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

内点法 **[interior point methods]**　针对单纯形法的边界趋近观念，改为内部逼近的想法 —— 与其像单纯形法沿着边界由一个顶点移到另一个顶点，何不离开边界而跨越可行解集合的内部以期迅速逼近最优解？

给定一个标准形式的线性规划问题 $\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant 0\}$，此处内点指的是 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, x_j>0, \quad j=1,\cdots,n\}$， 亦即分量均为正数的可行解。 对其对偶问题 $\max\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}, \boldsymbol{s}\geqslant 0, \boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m\}$ 而言，内点指的是 $\{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}, s_j>0, j=1,\cdots,n, \boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m\}$。

一个线性规划算法，只要是由内点开始，演进到一些新的内点，再终结于内点，便是一个内点算法。像单纯形算法一样，依照解题的角度不同，便有所谓的原规划内点法 (primal interior point methods)，对偶内点法 (dual interior point methods) 和原–对偶内点法 (primal-dual interior point methods)。更由于演进方法不同，常看到的内点法更冠以不同的名称，比方说卡玛卡原始的投影算法 (projective scaling method)，以

仿射变换取代投影变换的仿射算法 (afine scaling method)，以势能函数来远离边界的势能算法 (potential reduction method)。

线性规划的内点算法不但理论上是**多项式时间算法**，实际操作上也非常有效，可成功解决具有百万变数的大型线性规划问题。更被推广到解决**半定规划**问题以及具有线性约束的**非线性规划问题**。

(执笔：方述诚　校阅：章祥荪)

椭球法 [**ellipsoid method**]　求解**线性规划问题**的第一个多项式时间算法。由俄国科学家哈奇杨 (L. G. Khachian) 在 1979 年提出，因此亦称哈奇扬方法(Khachian method)。对一个线性规划问题 $\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 而言，根据**线性规划对偶原理**可得到一组线性最优化条件：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{x}\geqslant 0\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{w}\geqslant 0\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

若是我们能找到一组 $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ 及 $\boldsymbol{w}^*\in\mathbb{R}^m$ 满足上述线性不等式组，则 $\boldsymbol{x}^*$ 为原问题最优解，$\boldsymbol{w}^*$ 为对偶问题最优解。而椭球法正是一种专门解线性不等式组的方法。

一般地，求解一组线性不等式 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$, 其中 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $p\times q$ 的矩阵，$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^q,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^p$。为了方便起见，我们利用二维空间情况来解释，但不难想象在高维空间里用椭球法来取代二维的椭圆。首先注意到的是因为 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$ 的解集合是一个多边凸集合 $S\triangleq\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^q|\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}\}$。只要 $S\neq\varnothing$，我们以原点 u^1 为心，足够大的半径做一圆 E^1，一定可以使得 $S\bigcap E^1\neq\varnothing$。此时我们检验 $\boldsymbol{M}u^1\leqslant\boldsymbol{v}$ 是否成立。若是成立，则 $u^1\in S\bigcap E^1$ 正是我们需要的解答。否则的话，因为 $S\bigcap E^1$ 是一个凸集合，所以经过圆心，我们可以切掉不含 $S\bigcap E^1$ 的半个圆，而只留下包含 $S\bigcap E^1$ 的半个圆 $\left(\text{以 }\dfrac{1}{2}E^1\text{ 表示}\right)$。对 $\dfrac{1}{2}E^1$ 而言，我们可以做出一个最小的椭圆 E^2 使得 $\dfrac{1}{2}E^1\subseteq E^2$。这个椭圆的圆心可由公式求得并以 u^2 表示。值得注意的是 $S\bigcap E^1\subseteq E^2$，所以我们再检验 $\boldsymbol{M}u^2\leqslant\boldsymbol{v}$ 是否成立。若是成立，则 $u^2\in S\bigcap E^1$ 必为其解。否则经过 u^2 我们又可切去半个 E^2，而使 $S\bigcap E^1$ 包含在另一半椭圆 $\dfrac{1}{2}E^2$ 之中。再使用 $\dfrac{1}{2}E^2$ 做出一个最小的椭圆 E^3，使得 $\dfrac{1}{2}E^2\subseteq E^3$。我们再利用公式求出新的圆心 u^3 并检验 $\boldsymbol{M}u^3\leqslant\boldsymbol{v}$ 是否成立。重复此步骤直到该停止时才停。

值得注意的是在 p 维空间中，每次做出的椭球体积都会逐渐减小。若是我们以 $V(E^k)$ 及 $V(E^{k+1})$ 来表示前后两个椭球的体积，那么可以证明出来 $V(E^{k+1})<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(p+1)}V(E^k)$。也就是说 $V(E^{k+1})<\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}(p+1)}V(E^1)$。由于 $\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}(p+1)}$ 依着指数式减少，可看出 $V(E^k)$ 随着 k 的增加而减小很快。所以在多项式时间内，新的椭球体积便可缩减至零，要是此时的球心仍不满足 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$，那么我们可以判断出 $S=\varnothing$，亦即原题无解。椭球法在理论上的贡献远大于实际操作，对解一般线性规划问题而言，远不如单纯形法有效。

(执笔：方述诚　校阅：章祥荪)

卡玛卡算法 [**Karmarkar's algorithm**]　多项式时间**内点法**的始祖，也是求解**线性规划**问题的第二个**多项式时间算法**。在 1984 年由印裔美国科学家卡玛卡 (N. Karmarkar) 提出。相对于椭球法，卡玛卡算法非但理论上成功，实践上也非常有效率。

卡玛卡算法考虑下列形式的线性规划问题：

$$(\mathrm{KLP})\qquad\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ & \sum_{j=1}^n x_j=1,\quad x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{A}$ 是个 $m\times n$ 矩阵。集合 $S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\sum\limits_{j=1}^n x_j=1,\quad x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n\}$ 是一个单纯形，它的中心为 $\boldsymbol{x}^0=\left(\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}\right)$。$\boldsymbol{x}^0$ 到 S 边界的最近距离是 $r=\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$。$S$ 的内部点集合指的是 $S^0=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\sum\limits_{j=1}^n x_j=1,\quad x_j>0\}$。

卡玛卡算法的基本观念是：第一，给定任何一个 S 的内点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S^0$ 使得 $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$，用其分量 $\bar{x}_j,\quad j=1,\cdots,n$，可定义一个 $n\times n$ 维的对角矩阵 $\bar{\boldsymbol{X}}=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{x}})$。进而定义投影变换

$$T_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})=\frac{\bar{\boldsymbol{X}}^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}^{-1}\boldsymbol{x}},\quad\forall\boldsymbol{x}\in S,$$

其中，$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbb{R}^n$。此投影将 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点映至 S 的中心点 $\boldsymbol{x}^0$，还将 S 的内部点映至内部点，边界点映至边界点。第二，经过 $T_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\cdot)$ 变换后，卡玛卡线性规划问题 (KLP) 变成了下面问题：

$$(\overline{\mathrm{KLP}})\qquad\begin{aligned}\min\quad & \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}=0\\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1\\ & \boldsymbol{y}\geqslant 0\end{aligned}$$

第三，在 $(\overline{\mathrm{KLP}})$ 问题中，$\bar{\boldsymbol{y}}=T_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是 S 的中心点，将目标函数分子部分函数的负梯度方向 $(-\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c})$ 投影在约束矩阵

$\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}\\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 的零空间内，就可以得到一个移动方向：

$$\bar{\boldsymbol{d}}=[\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}](-\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c})。$$

沿着 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 方向移动可降低目标函数值，而且只要步长不大于 $\dfrac{1}{n}$，对应的新点

$$\boldsymbol{y}'=\bar{\boldsymbol{y}}+\frac{\alpha}{n}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{d}}}{||\bar{\boldsymbol{d}}||}\right),\quad 0<\alpha\leqslant 1$$

是一个 S 的内点，并满足 ($\overline{\text{KLP}}$) 的约束条件。

第四，将 $\boldsymbol{y}'$ 映射回原空间，那么 $\boldsymbol{x}'=\dfrac{\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}'}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}'}\in S^0$ 并是 (KLP) 问题的一个新的可行解，且具有较低的目标函数值。重复这个由 $\bar{\boldsymbol{x}}\longrightarrow\bar{\boldsymbol{y}}\longrightarrow\boldsymbol{y}'\longrightarrow\boldsymbol{x}'$ 的步骤，便可不断的求得新解直到该停时再停。

卡玛卡算法有些特殊方法可将上述基本观念推广到解决一般形式的线性规划问题。因为该算法使用了投影变换，故又称投影算法(projective scaling method)。一切线性规划多项式时间内点法均源起于卡玛卡算法。

（执笔：方述诚　校阅：章祥荪）

17.3 非线性规划

非线性规划 [non-linear programming]　亦称非线性最优化(non-linear optimization)。在有限个等式或者不等式约束下求解一个实函数的极值问题, 它通常可以写成：

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\quad & f(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t.}\quad & h_i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=1,\cdots,p;\\ & g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m.\end{aligned}$$

其中, $f(\boldsymbol{x})$ 及 $g_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\cdots,m)$，$h_i(\boldsymbol{x})$ $i=1,2,\cdots,p$ 都是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值连续函数, 且至少有一个是非线性的。$f(\boldsymbol{x})$ 被称为目标函数, $h_i(\boldsymbol{x}),g_i(\boldsymbol{x})$ 被称为约束函数。s.t. 是英文 subject to(满足于) 的缩写。

非线性规划可根据有无约束分为无约束优化和约束优化。约束优化还可根据约束函数和目标函数的特殊性进一步分成等式约束优化、线性约束优化、凸规划、二次规划、几何规划、半定规划、锥优化、非光滑优化等。

（执笔：袁亚湘　校阅：章祥荪）

无约束优化方法 [unconstrained optimization method]　无约束优化方法是指所有求解无约束优化问题

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$$

的计算方法。这些方法大多都是迭代法，即给一个初始值，算法每次迭代给出下一个迭代点，试图通过有限次迭代找到无约束优化问题的解或者是逐步产生一串点列让其收敛于优化问题的解。无约束优化方法主要分成利用导数的方法和不利用导数的方法。不利用导数的方法称为直接搜索法，主要包括区间分割法，坐标轮换法，共轭方向法，多项式插值法等。利用导数的方法主要有梯度法 (亦称最速下降法)，共轭梯度法，牛顿法，拟牛顿法等。

（执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹）

直接搜索法 [direct search method]　不要求函数可微，在计算中只使用目标函数值的无约束优化方法，这类方法中有坐标轮换法，采用轴向移动与模式移动相结合的胡克–吉夫斯 (Hooke-Jeeves) 模式搜索法、以共轭方向为背景的鲍威尔方法、罗森布罗克 (Rosenbrock) 旋转方向法、不断调整决策空间中的多面体 (单纯形) 的顶点来逐步逼近最优解的单纯形调优法。

（执笔：赖炎连　校阅：袁亚湘）

坐标轮换法 [univariate search technique]　坐标轮换法，亦称交替方向法，它利用 n 个坐标轴方向依次进行一维线搜索。坐标轮换法产生的点列可能不收敛，如果收敛，则必收敛于函数的稳定点。坐标轮换法和经典的柯西提出的最速下降法一样，可能会出现锯齿现象，从而收敛非常慢。由于坐标轮换法每一步只改变变量的一个分量，因此对于某些特殊问题，如 0-1 线性方程组问题，仍然是值得考虑使用的一种方法。

（执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘）

单纯形调优法 [simplex evolutionary method]　一种不断更换单纯形顶点，换入有更好的目标函数的顶点形成新的单纯形，以单纯形的好点来逼近最优解的实用直接搜索法。方法的要点是，对于 n 维问题，取 $n+1$ 不共面的顶点构成 n 维单纯形 (超多面体)，计算各顶点的目标函数值，去掉其中的“最坏点”，其余 n 点的平均称为余下 n 个顶点组成的反映面的中心，再求最坏点对于中心的反射点。若反射点好，则以此点代替坏点，组成新的单纯形，否则，以好点为中心将单纯形向好点方向缩小以形成新的单纯形。

（执笔：赖炎连　校阅：戴彧虹）

鲍威尔法 [Powell method]　一种求解无约束优化的共轭方向法，它每次迭代沿 n 个方向轮流搜索后得到一个新的搜索方向，依次逐步产生共轭方向。鲍威尔法的迭代步骤如下：

步 1. 给出初值 $\boldsymbol{x}_1$, 线性无关向量 $\boldsymbol{d}_1,...,\boldsymbol{d}_n$, $\epsilon\geqslant 0$, $k:=1$.

步 2. $\boldsymbol{x}_k^{(1)}=\boldsymbol{x}_k$;

步 3. 对于 $j=1,2,...n$ 执行：

① $\bar{\alpha}^{(j)} = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\boldsymbol{x}_k^{(j)} + \alpha \boldsymbol{d}_j)$;

② $\boldsymbol{x}_k^{(j+1)} = \boldsymbol{x}_k^{(j)} + \bar{\alpha}^{(j)} \boldsymbol{d}_j$;

步 4. $\boldsymbol{d}_j := \boldsymbol{d}_{j+1} (j = 1, 2, ..., n-1)$;

$\boldsymbol{d}_n := \boldsymbol{x}_k^{(n+1)} - \boldsymbol{x}_k$;

$\alpha_k^* = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_n)$;

$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k^* \boldsymbol{d}_n$; 如果 $||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k||_2 \leqslant \epsilon$ 则停；

$k := k+1$, 转步 2。

鲍威尔法的一个弱点是随着迭代次数的增加， 方向 $\boldsymbol{d}_1, ..., \boldsymbol{d}_n$ 很容易线性相关。所以，鲍威尔法在具体实施时需要修改，基本思想是每沿 n 个方向搜索后得到一个方向，是否将其替换一个已有方向的原则是让新的 n 个方向线性无关而且尽可能共轭。

(执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹)

平行切线法 [parallel tangent method]　试图改进柯西提出的*最速下降法*使其不出现锯齿现象的一种*共轭方向法*。设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是由柯西提出的最速下降法对凸二次函数产生的点列，则在理论上 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的连线会随着 k 的增加逐渐指向凸二次函数的极小点。平行切线法就是试图沿着 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的连线作线搜索以改进最速下降法。其基本思想是，在当前点 $\boldsymbol{x}_k$ 先沿负梯度方向 $-\boldsymbol{g}_k$ 作线搜索得到辅助点 $\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \mu_k \boldsymbol{g}_k$，然后再从辅助点 $\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 出发，沿 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 与 $\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 的连线作线搜索得到新的迭代点 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \alpha_k(\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} - \boldsymbol{x}_{k-1})$。如果均使用*精确搜索*，则对凸二次函数，平行切线法与共轭梯度法产生的点列完全一致。

(执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘)

优选法 [optimum seeking method]　在科学实验、工程设计、生产工艺设计、仪器设备调试、各类计划规划和管理决策等许多工作中，经常需要通过试验来选择最优的方案。优选方法是尽可能减少试验次数和试验成本的寻求最优方案的方法，而优选法则是这些优选方法的总称。

一般优选问题可表达为在一定条件下求取最优解：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \geqslant 0, \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

式中的 x 为决策变量，$f(x)$ 为目标函数，$g(x) \geqslant 0$ 和 $h(x) = 0$ 分别为不等式约束和等式约束。这一数学模型是一个*非线性规划*问题，与一般非线性规划问题不同的是，大部分优选问题的目标函数是不能预先由函数给出的，因而求解的算法通常是不利用目标函数的导数的。按照决策变量、目标函数、约束条件的不同，上面的模型可以演化成许多类型的优选方法。

例如，根据决策变量 x 的维数，可以分为单因素优选法和多因素优选法。常用的单因素优选方法有*黄金分割法*、“0.618”*法*、对分法、分数法 (即*斐波那契搜索*)、一批作多个试验的方法等；常用的多因素优选法有各类爬山法、因素轮换法、平行线法、陡度法、切块法、抛物体法等。

中国数学家华罗庚最早倡导在我国推广应用优选法，取得了大量优选法应用成果，在不增加投资、设备和人力的条件下，为实现优质、高产、低消耗做出了贡献，取得了明显的经济效益和社会效益。1984 年，华罗庚发表了专著《优选学》，较系统地介绍了他对优选学 (optimization) 的研究成果。

(执笔：徐伟宣　校阅：章祥荪)

斐波那契搜索 [Fibonacci search]　亦称“分数法”。在黄金分割法中，黄金数 $\omega = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐进分数是：

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \cdots$$

后面的分数比前面的分数更精确接近黄金数。根据实际的精度要求，选择其中一个渐进分数，例如 $\dfrac{21}{34}$，在这点做第 1 个试验，在它的对称点 $\dfrac{13}{34}$ 做第 2 个试验，其后的试验过程与*黄金分割法*一样。做了若干次试验后，结果达到要求便可以结束试验。

上面的渐近分数是由数列

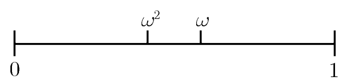
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

相邻二个数分别作为分子和分母构成。这是著名的斐波那契数列，是由中世纪意大利数学家斐波那契 (L. Fibonacci) 发现的。这一数列的构成规律是：从第 3 个数开始，每个数都是它紧前相邻的二数之和。

(执笔：徐伟宣　校阅：章祥荪)

黄金分割法 [golden section]　平面几何中，称一元二次方程 $\omega^2 = 1 - \omega$ 的正根 $\omega = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 为黄金数(golden number)。中世纪欧洲流行着这样的审美观：长和宽按照 $\omega : (1-\omega)$ 比例做的窗子最好看。

在优选法的数学模型中，如果决策变量 x 是一维的 (单因素)，目标函数 $f(x)$ 是单峰函数，但不能用显式表示或不可微，可以应用如下的黄金分割法进行优选。



设单峰函数 $f(x)$ 的决策变量 x 取值于区间 $[0, 1]$ ，要优选 x 使得目标函数的值最大。第 1 个试验点取在 ω 处，第 2 个试验点在它的对称点 $1 - \omega = \omega^2$ 处，如果试验结果 $f(\omega) \geqslant f(1-\omega)$，去掉小于 ω^2 的部分。这时剩下区间 $[\omega^2, 1]$

的长度是 $1-\omega^2=\omega$，留下已做过试验的点将区间分割的比例是 $(\omega-\omega^2){:}(1-\omega)=\omega$，和原来的比例相同。第 3 个试验点取在它的对称点，余此类推。同理可以处理 $f(\omega)\leqslant f(1-\omega)$ 的情形。可以看出，从第 2 个试验点开始，每多做一次试验，余下的区间长度将缩小为前面区间长度的 ω 倍。做了 n 次试验后，余下区间长度等于 $\omega^{(n-1)}$。注意到 $\omega<1$，试验区间以非常快的速度在缩小，很快便能找到最优点。

（执笔：徐伟宣　校阅：章祥荪）

“0.618”法 [**“0.618”method**]　亦称近似黄金分割法。在实际试验时，一般都是做过几次试验后，便能达到满意的结果，并不需要无穷尽地做下去。在黄金分割法中，取黄金数 $\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的三位近似值 0.618，第 1 个试验点取在试验区间的 0.618 处，第 2 个试验点在它的对称点 0.382 处，然后按照黄金分割法的相同步骤安排试验。为了便于宣传推广，华罗庚将这种方法命名为“0.618”法。

（执笔：徐伟宣　校阅：章祥荪）

搜索方向 [**direction of search**]　搜索方向与线搜索一起构成线搜索方法的两个重要组成部分。搜索方向一般是某个近似问题的解，使得沿着该方向作线搜索能找到一个目标函数值更小的点。该近似问题称为子问题，是原问题在当前迭代点附近的某种逼近。为使算法有效，通常要求子问题具有容易求解和较好地逼近原问题等性质。在无约束优化情形，常见的搜索方向有负梯度方向，共轭梯度方向，牛顿方向，拟牛顿方向等。

（执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘）

线搜索 [**line search**]　在当前迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 按某种方式确定搜索方向$\boldsymbol{d}_k$ 以后，沿直线 $\{\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k;\,\alpha\in\mathbb{R}^1\}$ 进行搜索，以发现一个合适的不太小的步长 α_k，使目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的值在新的迭代点 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\alpha_k\,\boldsymbol{d}_k$ 有一定的下降。在很多情况下，搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 为可行下降方向，从而总可以找到正的步长因子 α_k 使目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的值减少。线搜索的实质是极小化一维线搜索函数 $\varphi(\alpha)=f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k)$，它可以精确或非精确地进行求解，据此线搜索可分为精确搜索和非精确搜索。根据是否要求目标函数的值在每一个迭代步减少，线搜索又分为单调搜索与非单调搜索。总之，对极小化一般的非线性目标函数，线搜索是保证线搜索方法在任意选取初始点时全局收敛的一种必不可少的要素，线搜索的好坏也直接影响线搜索方法的计算效率。

（执笔：戴彧虹　校阅：章祥荪）

精确搜索 [**exact line search**]　通常是指精确求解子问题

$$\min\{f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k);\,\alpha\in\mathbb{R}^1\}$$

的线搜索，其中 $\boldsymbol{d}_k$ 为点 $\boldsymbol{x}_k$ 处的搜索方向。有时也指求一维线搜索函数 $\varphi(\alpha)=f(x_k+\alpha d_k)$ 的第一个稳定点，即求

$$\alpha_k=\arg\min\{\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{d}_k)=0,\,\alpha>0\}。$$

无论哪种形式的精确搜索，由于单参数函数 $\varphi(\alpha)$ 的函数值和导数值实际上需要计算 n 维函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的函数值和导数值，以致它们的计算量往往很大而在实际计算中很少采用。另一方面，由于精确搜索满足正交条件 $\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k+\alpha_k\boldsymbol{d}_k)=0$，人们在分析算法收敛性和有限终止性等理论时常使用精确线搜索。

（执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘）

非精确搜索 [**inexact line search**]　指非精确地求解一维线搜索函数 $\varphi(\alpha)=f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{d}_k)$，其中 $\boldsymbol{d}_k$ 为点 $\boldsymbol{x}_k$ 处的搜索方向，使目标函数在每个迭代步获得足够的下降量，而达到保证方法全局收敛的目的。数值有效的线搜索方法，一般在每一步迭代中的非精确搜索只需少数几次目标函数值的计算，因此初试步长的选取很重要。常用的非精确线搜索有沃尔夫 (Wolfe) 搜索，强沃尔夫搜索，阿米霍搜索，戈尔德施泰因 (Goldstein) 搜索等。沃尔夫搜索旨在求步长 α，满足

$$f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k)\leqslant f(\boldsymbol{x}_k)+\alpha\sigma_1\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k),$$

$$\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{d}_k)\geqslant\sigma_2\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k),$$

其中，σ_1 和 σ_2 是两个常数，满足 $0<\sigma_1\leqslant\sigma_2<1$。如果函数 $\varphi(\alpha)$ 连续可微，$\varphi'(0)=\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k)<0$，以及 $\varphi(\alpha)$ 下方有界，则必存在正的步长 $\alpha>0$，满足如上两个条件。进一步地，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 利普希茨连续可微，对沃尔夫搜索可以获得和精确搜索类似的函数下降量估计式：

$$f(\boldsymbol{x}_k)-f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{d}_k)\geqslant c\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k)\|_2^2\cos^2\theta_k,$$

其中 c 是某正常数，θ_k 为搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 与负梯度方向 $-\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k)$ 的夹角。

（执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘）

阿米霍搜索 [**Armijo line search**]　最常用的非精确线搜索之一，俗称回退搜索。设 $\boldsymbol{d}_k$ 是目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_k$ 处的搜索方向，满足 $\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k)<0$。给定初试步长 $\alpha_k^{(0)}>0$，常数 $\lambda\in(0,1)$ 以及 $\sigma\in(0,1)$，一种简单形式的阿米霍搜索是求这样最小的非负整数 $m=0,1,2,\cdots$，使得 $\alpha=\lambda^m\alpha_k^{(0)}$ 满足函数下降关系式：

$$f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k)\leqslant f(\boldsymbol{x}_k)+\alpha\sigma\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_k),$$

所得步长 $\alpha=\lambda^m\alpha_k^{(0)}$ 即为所需。实用的阿米霍搜索通常在旧的试探步长 α^{old} 不满足函数下降关系式时，利用已有信

息做二次插值，得到新的试探步长 α^{new}，并将它限制在区间 $[\lambda_1\alpha^{\mathrm{old}},\lambda_2\alpha^{\mathrm{old}}]$ 之中，其中 $\lambda_1<\lambda_2$ 为 $(0,1)$ 之间的常数。

(执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘)

非单调搜索 [non-monotone line search]　非单调搜索与单调搜索不同，并不要求目标函数值在每一个迭代步均严格下降，而是允许在某些迭代步上升。当目标函数有很多狭长山谷时，利用非单调搜索往往可以达“以退为进”的效果，能更快地求得最小值。设 $\boldsymbol{d}_k$ 是目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_k$ 处的搜索方向，满足 $\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)<0$，并给定初试步长 $\alpha_k^{(0)}>0$ 以及常数 $\lambda\in(0,1)$，$\sigma\in(0,1)$，经典的非单调搜索是*阿米霍搜索*的一种推广，即求这样最小的非负整数 $m=0,1,2,\cdots$，使得 $\alpha=\lambda^m\alpha_k^{(0)}$ 满足函数下降关系式：

$$f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\,\boldsymbol{d}_k)\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant\min(m,k-1)}f(\boldsymbol{x}_{k-i})+\alpha\sigma\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x}_k),$$

所得步长 $\alpha=\lambda^m\alpha_k^{(0)}$ 即为所需。

(执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘)

迭代算法 [iterative algorithm]　迭代算法是求解优化问题的一类基本算法。它主要包括三个步骤：① 选取一个初始解 x_0，并令 $k:=0$。② 判定 x_k 是否为最优解或者满足终止条件。若“是”，则输出当前的解 x_k，算法终止；否则，产生一个改进的解 x_{k+1}。③ 令 $k:=k+1$，返回到第②步。求解线性规划的单纯性算法就是一个迭代算法，它在有限步可以求得最优解。而求解非线性规划的大多数迭代算法，一般都无法在有限步找到最优解，而只能求得一个收敛到最优解的无穷序列 $\{x_k\}$。求解组合优化问题的迭代算法，通常都是在有限步终止，但是有时可以找到最优解，有时也只能找到近似最优解。

(执笔：胡晓东　校阅：赖炎连)

最速下降法 [method of steepest descent]　最速下降法是以负梯度方向作为*搜索方向*的方法，是所有需要计算导数的无约束优化算法中最简单的方法。设目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 连续可微，在迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 的导数为 $\boldsymbol{g}_k=\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$。若 $\boldsymbol{g}_k\neq 0$，负梯度方向 $-\boldsymbol{g}_k$ 是一个下降方向，而且具有性质

$$-\boldsymbol{g}_k=\arg\min_{||\boldsymbol{d}||_2=||\boldsymbol{g}_k||}\lim_{\alpha\to 0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{x}_k)}{||\boldsymbol{d}||_2}。$$

最速下降法的基本迭代公式为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{g}_k。$$

传统的选取步长 α_k 的方法为作*精确搜索*，即

$$\alpha_k=\arg\min_{\alpha>0}f(\boldsymbol{x}_k-\alpha\boldsymbol{g}_k),$$

为柯西 (Cauchy) 在 1847 年提出，然而它会出现锯齿现象，而且受问题的条件数影响很大。记 $\boldsymbol{s}_{k-1}=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}$ 以及 $\boldsymbol{y}_{k-1}=\boldsymbol{g}_k-\boldsymbol{g}_{k-1}$，一种新型的取法要求步长 α_k 具有某种拟牛顿性质：

$$\alpha_k=\frac{\boldsymbol{s}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{k-1}}{\boldsymbol{s}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{k-1}}=\arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}^1}||(\alpha\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{s}_{k-1}-\boldsymbol{y}_{k-1}||_2,$$

它由巴尔齐莱 (Barzilai) 与博温 (Borwein) 在 1988 年提出。结合*非单调搜索*，这种方法远比柯西的取法有效，已发展成为大规模优化问题的一种很有竞争力的方法。

(执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘)

黑塞矩阵 [Hessian matrix]　函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的黑塞矩阵即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的二阶导数矩阵

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}。$$

当 $f(\boldsymbol{x})$ 二阶连续可微时，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 是对称矩阵。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

共轭方向法 [conjugate direction method]　亦称<u>共轭梯度法</u>(conjugate gradient method) 或<u>鲍威尔共轭方向法</u>(Powell conjugate direction method)。首先，设 $\boldsymbol{G}$ 为正定对称矩阵，一组非零向量 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_k$ 称为相互 $\boldsymbol{G}$ 共轭的，如果 $\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{p}_j=0,\forall i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant k$。一种方法，如果当它应用于黑塞矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为正定的二次函数时，所生成的搜索方向是 $\boldsymbol{G}$ 共轭的，则称为共轭方向法。由于黑塞矩阵 $\boldsymbol{G}$ 最多有 n 个相互共轭的向量，其中 n 为 $\boldsymbol{G}$ 的维数，因此共轭方向法经过有限次迭代可以精确达到二次凸函数的极小点，即具有二次终结性。重要的共轭方向法包括计算函数导数值的共轭梯度法与不计算函数导数值的鲍威尔共轭方向法。共轭梯度法是利用目标函数的梯度逐步产生共轭方向作为搜索方向的方法，其基本迭代公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1}&=\boldsymbol{x}_k+\alpha_k\boldsymbol{d}_k,\\ \boldsymbol{d}_k&=-\boldsymbol{g}_k+\beta_k\boldsymbol{d}_{k-1},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{d}_1=-\boldsymbol{g}_1$，$\beta_k$ 为参数，α_k 由某种线搜索得到。鲍威尔共轭方向法是利用求平行子空间的极小值的方式来产生共轭方向进行搜索，它不计算函数导数值，是一种直接方法。

(执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘)

负曲率方向 [negative curvature direction]　若方向 $\boldsymbol{d}$ 满足 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}<0$, 则称 $\boldsymbol{d}$ 为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的负曲率方向。从定义知，当 $\boldsymbol{d}$ 为负曲率方向时，$-\boldsymbol{d}$ 也是负曲率方向。在鞍点处，负曲率方向必为下降方向。在一般点 $\boldsymbol{x}$ 处，若负曲率方向 $\boldsymbol{d}$ 满足 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x})=0$, 则 $\boldsymbol{d}$ 与 $-\boldsymbol{d}$ 均为下降方向；若 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x})\neq 0$，则 $\boldsymbol{d}$ 与 $-\boldsymbol{d}$ 恰有其一为下降

方向。因此，一旦求得负曲率方向，便可得到一个下降方向，算法便能继续进行。由此可以导出线搜索牛顿法的一种修正，使得牛顿方向非下降方向时，算法可以通过发现负曲率方向，找到下降方向。与此同时，算法还可保证找到或趋向于一个其黑塞 (Hesse) 矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 半正定的稳定点，即满足二阶必要条件的最优解。

（执笔：戴彧虹 校阅：袁亚湘）

牛顿法 **[Newton's method]** 无约束优化方法中最基本的方法。它的迭代公式是

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k))^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}_k)。$$

牛顿法是一个逐步逼近法，它每次迭代计算目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在当前迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 处二次泰勒展开之极值。牛顿法实质上就是求梯度的零点即 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的牛顿–拉弗森方法(Newton-Raphson method)。

牛顿法的优点是它具有二次收敛性质：即当 $\boldsymbol{x}_k$ 充分靠近解 $\boldsymbol{x}^*$ 而且 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ 正定时必有

$$||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*||_2 = O(||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*||_2^2)。$$

牛顿法仅是个局部方法，如果初值不靠近解就有可能不收敛。所以，在算法实现时，我们要加上线搜索技术或者是信赖域技巧才能保证牛顿法收敛。

非线性方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), \cdots, F_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = 0$ 的牛顿–拉弗森方法也简称为牛顿法，它的迭代公式为：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (J(\boldsymbol{x}_k))^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),$$

其中 $J(\boldsymbol{x}_k) = (\nabla F_1(\boldsymbol{x}_k), \nabla F_2(\boldsymbol{x}_k), \cdots, \nabla F_n(\boldsymbol{x}_k))^{\mathrm{T}}$ 是向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的雅可比矩阵。特别地，一维方程求根问题 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的牛顿法是

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \frac{f(\boldsymbol{x}_k)}{f'(\boldsymbol{x}_k)}。$$

（执笔：袁亚湘 校阅：戴彧虹）

高斯–牛顿法 **[Gauss-Newton method]** 求解非线性最小二乘问题

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})||_2^2 = \sum_{i=1}^m (F_i(\boldsymbol{x}))^2$$

的基本方法, 它的迭代公式为

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k))^{-1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),$$

其中 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) = (\nabla F_1(\boldsymbol{x}_k), \nabla F_2(\boldsymbol{x}_k), \cdots, \nabla F_m(\boldsymbol{x}_k))^{\mathrm{T}}$ 是向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的雅可比矩阵。高斯–牛顿法实质上是每次迭代用线性最小二乘

$$\min_{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{d}||_2^2 = \sum_{i=1}^m (F_i(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla F_i(\boldsymbol{x}_k))^2$$

来近似原始的非线性最小二乘问题。

如果 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ 奇异，高斯–牛顿法可定义为

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k))^{+} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)。$$

对高斯–牛顿法进行正则化，即令

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) + \lambda_k \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} F(\boldsymbol{x}_k),$$

其中 $\lambda_k \geqslant 0$ 是一参数，就得到了著名的利文贝格–马夸特方法。

（执笔：袁亚湘 校阅：戴彧虹）

利文贝格–马夸特方法 **[Levenberg-Marquadt method]** 求解非线性最小二乘问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})||_2^2 = \sum_{i=1}^m (F_i(\boldsymbol{x}))^2$$

的著名方法，它的迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - (\boldsymbol{J}(x_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}(x_k) + \lambda_k \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{J}(x_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}(x_k),$$

其中 $\boldsymbol{J}(x_k) = (\nabla F_1(x_k), \nabla F_2(x_k), \cdots, \nabla F_m(x_k))^{\mathrm{T}}$ 是向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的雅可比矩阵，$\lambda_k > 0$ 是参数。调节 λ_k 的通常做法是：如果在第 k 次迭代时求到的新点能使最小二乘之余量下降，我们就取 $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$，否则将 λ_k 扩大 10 倍直到得到一个下降步。

（执笔：袁亚湘 校阅：赖炎连）

拟牛顿法 **[quasi-Newton method]** 非线性最优化的一类十分重要的方法。该类方法用一个拟牛顿矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 来代替牛顿法中的二阶导数矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k)$。拟牛顿法具有形式：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{B}_k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}_k),$$

拟牛顿矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 满足拟牛顿方程 $\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{s}_{k-1} = \boldsymbol{y}_{k-1}$，其中

$$\boldsymbol{s}_{k-1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}, \quad \boldsymbol{y}_{k-1} = \nabla f(\boldsymbol{x}_k) - \nabla f(\boldsymbol{x}_{k-1})。$$

拟牛顿矩阵可逐步迭代产生，著名的拟牛顿公式有

BFGS 公式

$$\boldsymbol{B}_{k+1} = \boldsymbol{B}_k - \frac{\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{s}_k \boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_k}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{s}_k} + \frac{\boldsymbol{y}_k \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_k},$$

DFP 公式

$$\boldsymbol{B}_{k+1} = \boldsymbol{B}_k - \frac{\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{s}_k \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{y}_k \boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_k}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_k} + \left(1 + \frac{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{s}_k}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_k}\right) \frac{\boldsymbol{y}_k \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_k},$$

对称秩 1 公式

$$\boldsymbol{B}_{k+1}=\boldsymbol{B}_k+\frac{(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{s}_k)^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{s}_k)}。$$

拟牛顿法具有很好的性质：不变性，二次终止性和局部超线性收敛性。

（执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹）

变尺度法 [variable metric method]　如果每次迭代中的拟牛顿矩阵都正定，则拟牛顿法也称为变尺度法, 因为此时拟牛顿方法实质上是在尺度 $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{B}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}$ 意义下的最速下降法。

（执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹）

信赖域半径 [trust region radius]　信赖域方法中每次迭代中要求试探步 $\boldsymbol{d}_k$ 满足

$$||\boldsymbol{d}||\leqslant\rho_k,$$

式中，$||\boldsymbol{d}||$ 是 $\boldsymbol{d}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，$\rho_k>0$ 称为信赖域半径。范数 $||\boldsymbol{d}||$ 通常取为 $||\boldsymbol{d}||_2$, $||\boldsymbol{d}||_\infty$, 和 $\boldsymbol{D}_k$ 范数：$||\boldsymbol{d}||_{\boldsymbol{D}_k}=\sqrt{\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{d}}$，其中 $\boldsymbol{D}_k$ 是某个对称正定矩阵。

（执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹）

信赖域法 [trust region algorithms]　求解优化问题的一类算法。这类方法不需要进行线搜索，其基本思想是每次迭代在一个区域内试图找到比当前迭代点更好的点。每次迭代，信赖域算法在一个区域上寻求一个试探点，也称试探步。该区域称为信赖域，通常是以当前迭代点为中心的一个小球域。它称之为信赖域是因为我们仅仅在该区域上信赖原优化问题的某种近似问题。试探点往往就是这个近似问题在信赖域上的解。试探点求出后利用某一评价函数来判断它是否可以被接受为下一个迭代点。试探点的好坏还用来决定如何调节下一次迭代的信赖域。粗略地说，如果试探点较好，则信赖域保持不变或扩大；否则将缩小。特别地，当信赖域是以当前迭代点为中心的小球时，信赖域的调节就是调整信赖域半径的大小。

信赖域方法早期也被称为限制步长法，它用于非线性最小二乘时和著名的利文贝格–马夸特方法有紧密的联系。

（执笔：袁亚湘　校阅：戴彧虹）

约束优化方法 [constrained optimization method]　指所有求解有约束优化问题的计算方法。这些方法大多都是迭代法，即给一个初始点，算法每次迭代给出下一个迭代点，试图通过有限次迭代找到约束优化问题的解或者是产生一串点列使其逐步收敛于优化问题的解。较无约束优化方法，约束优化方法需要有某种技巧处理约束，因此在实际计算中一定要根据约束问题的种类以及约束函数的性质选用合适的约束优化方法。对于一般的非线性约束优化问题，约束优化方法主要分为罚函数法，逐步二次规划方法，逐步线性方程组方法，内点法，信赖域法，可行方向法。

（执笔：戴彧虹　校阅：袁亚湘）

有效约束 [active constraint]　设集合 $D=\{\boldsymbol{x}|h_1(\boldsymbol{x})=0,\cdots,h_p(\boldsymbol{x})=0,g_1(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\cdots,g_m(\boldsymbol{x})\leqslant 0\}$ 为非线性规划问题的可行域。对 D 中的某一可行点 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 集合 $\{g_j|g_j(\bar{\boldsymbol{x}})=0\}\bigcup\{h_i,i=1,\cdots,p\}$ 称为在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 处的有效约束, 或称积极约束。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

可行方向 [feasible direction]　考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的非线性规划问题：

$$\begin{aligned}&\min\quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in D\end{aligned}$$

若对可行域 D 中的一点 $\bar{\boldsymbol{x}}$，向量 $\boldsymbol{d}$ 称为在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的一个可行方向，是指存在 $\delta>0$，使 $[\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{x}}+\delta\boldsymbol{d}]\in D$。若对任意 $\boldsymbol{x}\in[\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{x}}+\delta\boldsymbol{d}]$, 有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则称 $\boldsymbol{d}$ 为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的可行下降方向(feasible descent direction) 。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

可行方向法 [feasible direction method]　一大类解非线性规划问题的算法。它是用解一系列单变量优化问题的子问题来实现原来在 n 维空间中的问题的求解。单变量优化问题的求解有两个因素：一是从可行域 D 中一可行点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发，按某种方式求得可行下降方向 $\boldsymbol{d}$，即存在 $\lambda>0$，使得 $[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{d}]\in D$，方向的选取使目标函数下降；二是沿方向 $\boldsymbol{d}$ 作线性搜索，从而可找到下一个更好的解。线性化方法、梯度投影法、既约梯度法等都属于可行方向法。

（执笔：章祥荪　校阅：赖炎连）

梯度投影法 [gradient projection method]　将求解无约束优化问题的最速下降法推广用于求解凸集约束优化问题的一种可行方向法。简记凸集约束优化问题为

$$\min\ f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,$$

其中 Ω 为凸可行集，并定义投影 P_Ω 为

$$P_\Omega(\boldsymbol{x})=\arg\min\{||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}||,\ \boldsymbol{z}\in\Omega\}。$$

设在当前可行点 $\boldsymbol{x}_k$ 处目标函数的梯度为 $\boldsymbol{g}_k=\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x}_k)$，梯度投影法试图在曲线 $P_\Omega(\boldsymbol{x}_k-\alpha\boldsymbol{g}_k)$ 上发现合适的步长 α_k，使目标函数值有一定的下降，并取

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=P_\Omega(\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{g}_k)$$

作为下一个迭代点。为了减少每一个迭代的投影次数，改进的梯度投影法在选定初试步长 $\alpha_k^{(0)}$ 以后，只做一次投影 $P_\Omega(\boldsymbol{x}_k-$

$\alpha_k^{(0)}\boldsymbol{g}_k)$，然后在 $\boldsymbol{x}_k$ 点和该投影点的连线进行线搜索得到新的迭代点：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \lambda_k P_\Omega(\boldsymbol{x}_k - \alpha_k^{(0)}\boldsymbol{g}_k),$$

其中 $\lambda_k \in (0,1)$。梯度投影法的有效性与投影 P_Ω 的难易程度密切相关，当可行集 Ω 为盒子 (box)、球 (ball)、有序单纯形 (order simplex) 等时，投影梯度法是一种非常有效的方法。对于一般的约束优化问题，理论上也可推广梯度投影法，得到某种近似可行方向法，然而由于此时投影很难计算得到，因此往往不如其他方法有效。

（执笔：戴彧虹　校阅：章祥荪）

既约梯度法 [**reduced gradient method**]　是线性规划单纯形方法在解线性约束的*非线性规划*时的推广。对于线性等式约束与变量非负约束的优化问题，在约束非退化假定下，将变量分为*基变量*(非独立变量) 与非基变量 (独立变量) 两部分，从等式约束中解出基变量用非基变量表示，并代入目标函数中消去基变量，使原问题转化为只含非基变量的不等式约束与变量非负约束的新的降低了维数的优化问题。新目标函数关于非基变量的梯度向量，称为既约梯度。利用既约梯度构造下降方向的算法，称为既约梯度法。当目标函数为线性函数时，既约梯度就是线性规划单纯形方法中的检验数向量。该方法于 1963 年由沃尔夫 (P. Wolfe) 提出，因此也称为沃尔夫既约梯度法。1969 年，阿巴迪 (J. Abadie) 与卡尔庞捷 (J. Carpentier) 将它推广应用于非线性约束的问题，称为*广义既约梯度法*。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

广义既约梯度法 [**generalized reduced gradient method**]　是线性约束问题的*既约梯度法*在非线性约束问题上的推广。若在一可行点上，非线性约束方程组关于*基变量*的雅可比矩阵非奇异，则由隐函数定理在该点的邻域内可确定基变量为非基变量的函数，由此可定义在该点的既约梯度并构造出使目标函数下降的迭代方向。为使新的迭代点满足非线性约束方程组，先取定一个迭代步长，使新的点的非基变量部分满足其他约束条件，并将它们代入非线性方程组，用*牛顿法*求出相应的基变量的解。若新的点使目标函数下降，则确定该点为新的迭代点，否则缩小步长，再用上述方法求得满足约束条件且使目标函数值下降的新的迭代点。该法 1969 年由阿巴迪 (J. Abadie) 与卡尔庞捷 (J. Carpentier) 提出后，应用效果很好，为优化界所重视。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

序贯无约束极小化方法 [**sequential unconstrained minimization technique(SUMT)**]　是一类将约束优化问题转化为求系列无约束优化问题的解的方法。其基本思想是将约束优化问题的目标函数和约束函数构造出一个含参数的无约束问题。参数在迭代求解无约束问题的过程中进行调整，使解点序列收敛到原问题的解。*罚函数法*，就是一类序贯无约束极小化的基本方法。

（执笔：赖炎连　校阅：章祥荪）

罚函数法 [**penalty function method**]　将*约束优化问题*的求解转化为系列的无约束问题的求解的方法。方法的重点是，利用约束函数构造惩罚项函数，以原目标函数与带惩罚参数的惩罚项函数之和作为新的无约束优化的增广目标函数。选择适当的惩罚参数求增广目标函数的最优解并逐步逼近原问题的解。无论是*外罚函数法*(外点法) 与*内罚函数法*(内点法)，若点不满足约束条件，罚项值为正，否则为零。例如，用*内点法*求解时，从内点出发且不允许走出约束区域，不越出不惩罚，超越多惩罚大，以此种方式来求得满足约束条件的最优解或近似最优解。罚函数思想最早是由柯朗 (Courant) 提出的，这种序贯无约束优化技巧 (SUMT) 于 20 世纪 60 年代得到充分的研究与发展。

（执笔：赖炎连　校阅：袁亚湘）

内罚函数法 [**interior penalty function method**]　内罚函数法要求可行区域有内点，即非线性优化问题 (MP)：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p。\end{aligned}$$

满足 $G^0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\boldsymbol{x}) < 0, 1 \leqslant i \leqslant p\} \neq \phi$。内罚函数法从初始内点开始计算，可选取惩罚项函数为 $B_r(\boldsymbol{x}) = -r\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{1}{g_i(\boldsymbol{x})}$或 $B_r(\boldsymbol{x}) = -r\sum\limits_{i=1}^{p}\ln[-g_i(\boldsymbol{x})]$，增广目标为 $F_r(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + B_r(\boldsymbol{x})$。$\min F_{r_k}(\boldsymbol{x})$ 的最优解一定属于 G^0 并逐步减小 r 值得到原问题 MP 的最优解或近似最优解。

（执笔：赖炎连　校阅：袁亚湘）

外罚函数法 [**exterior penalty function method**]　对于带等式与不等式约束的优化问题 (MP)：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p; \\ & h_j(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, q,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

外罚函数法取惩罚项函数 $P_{\sigma(x)} = \sigma\sum\limits_{i=1}^{p}[\max(g_i(\boldsymbol{x}), 0)]^2 + \dfrac{\sigma}{2}\sum\limits_{i=1}^{q}[h_j(\boldsymbol{x})]^2$，其中 σ 为罚参数。以 $F_{\sigma(\boldsymbol{x})} = f(\boldsymbol{x}) + P_\sigma(\boldsymbol{x})$ 为增广目标函数，取充分大的 σ_k，求 $F_{\sigma_k}(\boldsymbol{x})$ 的最优解 $\boldsymbol{x}^k$，以 $\boldsymbol{x}^k$ 逼近 MP 的最优解。显然，当 $P_{\sigma_k} = 0$ 时，$\boldsymbol{x}$ 为 MP

的可行解。外罚函数法从任意初始点出发，希望得到满足约束条件的最优解或近似最优解。

（执笔：赖炎连 校阅：袁亚湘）

精确罚函数 [exact penalty function] 考虑非线性规划的罚函数法时，一个罚函数如果在约束优化问题的极值点处达到极值则称为精确罚函数。

典型的精确罚函数有 L_1 罚函数、L_∞ 罚函数和弗莱彻 (Fletcher) 光滑精确罚函数。L_1 罚函数，和 L_∞ 罚函数都是非光滑罚函数，他们分别为

$$P_1(\boldsymbol{x},\sigma)=f(\boldsymbol{x})+\sigma||c(\boldsymbol{x})||_1,$$

$$P_\infty(\boldsymbol{x},\sigma)=f(\boldsymbol{x})+\sigma||c(\boldsymbol{x})||_\infty,$$

其中

$$c_i(\boldsymbol{x})=\begin{cases} h_i(\boldsymbol{x}), & i=1,\cdots,p; \\ \min[0,g_i(\boldsymbol{x})], & i=1,\cdots,m。\end{cases}$$

这两个罚函数在罚因子大于拉格朗日乘子的对偶范数时是精确罚函数。也就是说，设 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}=(\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)^{\mathrm{T}}$, L_1 罚函数在 $\sigma>||\bar{\boldsymbol{\lambda}}||_\infty$ 是精确罚函数，而 L_∞ 罚函数在 $\sigma>||\bar{\boldsymbol{\lambda}}||_1$ 是精确罚函数。对于等式约束优化问题，弗莱彻精确罚函数定义为：

$$P(\boldsymbol{x},\sigma)=f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+\sigma||\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})||_2^2,$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{\nabla h}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}})^+\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x})$。

（执笔：袁亚湘 校阅：赖炎连）

拉格朗日乘子法 [Lagrange multiplier method] 是求解古典的等式约束优化问题的解的方法。对于等式约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\min\quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad h_j(\boldsymbol{x})=0, j=1,2,\cdots,q,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n。\end{aligned}$$

其拉格朗日函数为 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_jh_j(\boldsymbol{x})$。$\mu_j$ 为拉格朗日乘子。解变量为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\mu}$ 的方程组 $\boldsymbol{\nabla}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=0$，求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\mu}$，得问题的解及相应的乘子，此法亦称为古典拉格朗日乘子法。

（执笔：赖炎连 校阅：章祥荪）

增广乘子法 [augmented multiplier method] 将拉格朗日函数与罚函数结合形成新的增广目标函数的一种方法。对于等式非线性规划问题

$$\begin{aligned}&\min\quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad h_j(\boldsymbol{x})=0, j=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

设 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 为拉格朗日函数，无约束优化的增广目标函数为

$$F_{m_k}(\boldsymbol{x})=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})+\frac{m_k}{2}\sum_{j=1}^{p}(h_j(\boldsymbol{x}))^2。$$

并使用乘子迭代公式 $\mu_j^{k+1}=\mu_j^k+\alpha_kh_j(x(\boldsymbol{\mu}^k)), j=1,2,\cdots,q$。其中 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}^k)$ 是 $\min_{\boldsymbol{x}}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}^k)$ 的局部最优解，这一方法于 1969 年由赫斯泰尼斯 (Hestenes) 提出，故也称为赫斯泰尼斯乘子法。选取初始点 x^0，初始乘子 u^1，以 x^{k-1} 为初始点，求 $\min F_{m_k}(x,\boldsymbol{\mu}^k)$ 的解 x^k，计算 $\boldsymbol{\mu}^{k+1}$，反复迭代。该方法克服了罚函数法的罚参数很大时引起的计算困难，对于不等式约束的问题，通过在各不等式中加入变量 y_i^2 化为等式约束，利用等式约束的乘子法结果及消去变量 y_i 等技巧，罗卡费勒 (Rockafellar) 给出了不等式约束的乘子法及一般约束的成果，从而形成了一类有效的优化问题算法。

（执笔：赖炎连 校阅：章祥荪）

序列二次规划方法 [sequential quadratic programming method(SQP)] 是通过逐步求解二次规划来求解一般约束优化问题的方法, 简称 SQP 方法。该方法通过求解二次规划问题得到搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$，然后沿 $\boldsymbol{d}_k$ 对某个罚函数进行线搜索得到下一个迭代点。 由于在每次迭代中的二次规划问题通常是在线性化约束条件下求拉格朗日函数之二次近似的极小值， 所有 SQP 方法可看成是求拉格朗日函数稳定点的近似牛顿法。 如果每次迭代中二次规划问题的目标函数是拉格朗日函数很好的二阶近似，则序列二次规划方法具有超线性收敛性。

（执笔：袁亚湘 校阅：赖炎连）

中心路径法 [central path method] 求解约束优化问题的一类算法。其基本思想是在迭代过程中始终沿着可行域内部的一条路径逐步逼近到问题的最优解。下面用例子加以说明。

考虑一个标准的线性互补问题 $L(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$：$\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{q}\geqslant 0,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0$, 这里 $\boldsymbol{M}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$ 已给定。令 $S_+=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{2n}\mid \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{y}\geqslant 0\}$, $S_{++}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S_+\mid \boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{y}>0\}$, 则分别称 S_+ 和 S_{++} 为 $L(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 的可行集和严格可行集。设 $\mu>0$ 为一个参数，我们称集合 $S_{\mathrm{cen}}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S_{++}\mid X\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{e},\mu>0\}$ 为 $L(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 的一条中心路径，这里 $\boldsymbol{X}$ 是由 $\boldsymbol{x}$ 的分量保序生成的对角矩阵，$\boldsymbol{e}$ 是每个分量为 1 的 n 维向量，它是关于参数 $\mu>0$ 的一条曲线，记为 $\{(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu)),\mu>0\}$。在一定条件下，可以证明该曲线光滑且当 $\mu\to 0$ 时，$(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu))$ 收敛到 $L(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 的一个解。

以此为理论基础，导出了包括路径跟踪法、势减缩法、原始对偶法、预测校正法和宽邻域算法等一系列内点算法。根

据初始点的情况还有可行内点方法和不可行内点方法之分。

(执笔：修乃华 校阅：赖炎连)

极大熵方法 [maximum entropy method] 一类以引入恰当的极大熵函数来近似不可微的最大值函数为主要思想的正则化方法。它在有限极大极小问题、约束优化问题、多目标优化问题、半无限规划、线性规划、模糊优化、大规模优化问题等数学规划领域以及结构优化设计和系统控制等领域都有重要的应用。

考虑有限极大极小问题 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x})=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(\boldsymbol{x})$，定义最大值函数 $F(\boldsymbol{x})$ 相应的极大熵函数为$\bar{F}(\boldsymbol{x},p):=\dfrac{1}{p}\ln\sum\limits_{i=1}^{n}\exp(pf_i(\boldsymbol{x}))$。当 $p\to+\infty$ 时,$\bar{F}(\boldsymbol{x},p)$ 一致收敛到 $F(\boldsymbol{x})$。极大熵方法就是通过求解参数 p 充分大时的可微无约束优化问题 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\bar{F}(\boldsymbol{x},p)$ 以期获得原来的问题的近似解。

极大熵方法虽然结构简单、方法易实现且计算速度快, 但当参数充分大后, 极大熵函数便趋于病态, 使得算法无法进行下去。因此目前须解决的问题是探求克服极大熵函数病态的有效途径, 使其既有较高的计算效率, 又有较好的数值稳定性。

(执笔：修乃华 校阅：赖炎连)

同伦算法 [homotopy algorithm] 基本思想是通过构造一个恰当的同伦方程组, 在一定条件下生成一条光滑曲线, 跟踪这条曲线得到原问题的解。

考虑非线性规划问题 $\min\{f(\boldsymbol{x})|g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m\}$, 构造如下组合同伦方程组：

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,t):=\begin{pmatrix}(1-t)(\nabla f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{i=1}^{m}\nabla g_i(\boldsymbol{x})y_i)+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\\(1-t)y_1g_1(\boldsymbol{x})-ty_1^0g_1(\boldsymbol{x}^0)\\\vdots\\(1-t)y_mg_m(\boldsymbol{x})-ty_m^0g_m(\boldsymbol{x}^0)\end{pmatrix}=0。$$

其中 $t\in[0,1]$。在一定条件下, 可以证明上述同伦方程组可以生成一条始于点 $(x_0,y_0,1)$ 且保持在可行域内部的光滑路径, 并且当 $t\to 0$ 时收敛到原非线性规划问题的一个 KKT 点。

同伦算法在求解线性规划、凸规划、非凸规划、变分不等式与互补问题等方面都取得了较好的结果, 故该方法的应用前景比较广阔, 但现行算法还有不足之处, 如在求解非凸规划时, 只有在很强的条件下才能保证算法的整体收敛性。

(执笔：修乃华 校阅：赖炎连)

割平面法 [cutting plane method] 非线性的凸规划问题，可以转化为线性目标的下述问题：

$$\begin{aligned}&\min\quad c\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.}\quad g(\boldsymbol{x})\leqslant 0。\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$g(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),g_2(\boldsymbol{x}),\cdots,g_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$。$g_i(\boldsymbol{x})$ 为连续可微函数。

割平面方法是利用凸集与凸函数的特性，通过每次求解一个线性规划并判别它不是原问题的解时，增加一个超平面约束，使得此解点不在新的约束集内。以此新的约束集再解目标为 $c\boldsymbol{x}$ 的线性规划，不断重复这种计算步骤，以序列线性规划的解逼近原规划的解。步骤要点是，令 $S=\{\boldsymbol{x}|g(\boldsymbol{x})\leqslant 0\}$，求初始多胞形 P，使 $P\supset S$。解线性规划 $\min c\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}\in P$。设最优解为 $\boldsymbol{y}$，若 $g(\boldsymbol{y})\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{y}$ 为问题的解。否则，令 j 为使 $g_j(\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(\boldsymbol{y})$ 成立的下标 j，$g_j(\boldsymbol{y})>0$。在 P 中加入割平面：

$$g_j(\boldsymbol{y})+\nabla g_j(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\leqslant 0$$

构成新的多胞形 $P',P'\supset S$，再解以 P' 为约束集的线性规划，直至收敛到原问题的解。对于 S 为凸集 [$g_i(\boldsymbol{x})$ 不要求凸函数] 的问题，若 S 有内点，可以给出另一种求割平面的方法，即引内点与线性规划最优点的连线，求它与 S 的交点，做此点的支撑超平面作为新的割平面，再求解，这一方法称为支撑超平面方法。

(执笔：赖炎连 校阅：修乃华)

17.4 多目标规划

偏好 [preference] Y 是空间的一个子集。判断 Y 中元素之间的优与劣、大与小的标准 (或原则) 称为 Y 上的偏好。偏好可以是决策者主观的意愿，也可以是问题固有的要求。偏好是 Y 中元素的一个二元关系，即是乘积空间 $Y\times Y$ 中的一个子集，记为 $\{\succ\}$，满足条件 $(y^1,y^2)\in\{\succ\}$ 等价于 $y^1\succ y^2$，即 y^1 优于 y^2，或 y^1 较 y^2 更大。同样类似可以定义 $\prec$。

在数学理论中，如果偏好满足自反性、传递性以及反对称性，则称为偏序。如有限维空间中的坐标序，及通常的字典序等都是典型的偏序例子。

(执笔：陈光亚 校阅：傅俊义)

帕雷托偏好 [Pareto preference] Y 是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集。对于 Y 中的点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，如果认为 $\boldsymbol{y}$ 中的每个分量 y_i，数值越大，此点越好，而又没有其他可比较的信息可利用。在 Y 上的帕雷托偏好 $\{\succ\}$ 定义成：设 $\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2\in Y$,$\boldsymbol{y}^1\succ\boldsymbol{y}^2$，如果 $y_i^1\succ y_i^2$,$i=1,2,\cdots,n$,

且至少一个 i_0 使得 $y^1_{i_0} \neq y^2_{i_0}$ 。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

控制结构 [domination structure]　Y 是一个线性空间的子集，Y 上的控制结构是 Y 中的一个子集系 $\{D(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in Y\}$,$\mathbf{0} \in D(\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{y} \in Y$。子集 $D(\boldsymbol{y})$ 可以是凸锥，可以是凸集，也可以是一般的集合。利用 Y 上的一个偏好$\{\succ\}$ 可构造 Y 上的一个控制结构。如果对于每个 $\boldsymbol{y} \in Y$，定义 $D(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{z} \in Y|\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}\}$，则集合系 $\{D(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in Y\}$ 是 Y 上的一个控制结构。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

变动偏好结构 [variable preference structure]　Y 是一个线性空间，如果 Y 中的每个点与 Y 中其他点比较优与劣的标准是不一样的，则称 Y 上的一个变动偏好结构 $\{\succ_{\boldsymbol{y}} |\boldsymbol{y} \in Y\}$。$Y$ 上的每一个控制结构$\{D(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in Y\}$ 界定了 Y 上一个变动偏好结构 $\{\succ_{\boldsymbol{y}} |\boldsymbol{y} \in Y\} : \boldsymbol{y}^1 \succ_{\boldsymbol{y}^2} \boldsymbol{y}^2$，如果 $\boldsymbol{y}^1 \in \boldsymbol{y}^2 + D(\boldsymbol{y}^2)$。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

有效性 [efficiency]　在一个决策集合中按此决策集合上的偏好寻找一个点，使得在此集合中找不到另一点比它更好。满足以上性质的决策集合的点称为有效点、或非劣点、或 N 点。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

帕雷托有效性 [Pareto efficiency]　如果一个决策集合的有效性的偏好是帕雷托偏好，此有效性称为帕雷托有效性。满足于帕雷托有效性的点称为帕雷托最优点。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

非控点 [nondominated point]　在某决策集合中寻找有效点时，其上的偏好是一个变动偏好，或用控制结构$D = \{D(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in Y\}$ 所界定的变动偏好。设 Y 是决策集合，$D = \{D(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in Y\}$ 是控制结构，对于点 $\boldsymbol{y}^0 \in Y$ 如果不存在 $\boldsymbol{y} \in Y$ 使得 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^0 + D(\boldsymbol{y}) \setminus \{\mathbf{0}\}$，则称 $\boldsymbol{y}^0 \in Y$ 称为 Y 的非控点。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

似非控点 [nondominated-like point]　对于 $\boldsymbol{y}^0 \in Y$，如果不存在 $\boldsymbol{y} \in Y$ 使得 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^0 + D(\boldsymbol{y}^0) \setminus \{\mathbf{0}\}$，则 $\boldsymbol{y}^0$ 称为 Y 的似非控点。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

向量值函数 [vector-valued function]　一个函数，若其值域是一个线性空间或一个线性空间的一个子集，则称此函数为向量值函数。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

集合值函数 [set-valued function]　一个函数，若其值是某一个空间的非空子集，则称此函数为集合值函数或集值函数。它是向量值函数概念的推广。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

多目标优化 [multi-objective optimization]　多目标优化问题可界定成一个三元组 $(A, \boldsymbol{f}, \prec)$，其中 A 是决策集合，$\boldsymbol{f}$ 是一个向量值函数，称为多目标函数，“$\prec$”是多目标函数的值域空间上的偏好。设 $Y = \boldsymbol{f}(A)$，则在 Y 上寻找有效点、或帕雷托最优点、或非控点、或似非控点的问题称为多目标优化问题。这些有效点、帕雷托最优点、非控点或似非控点在多目标函数下的逆象称为问题的有效解、帕雷托最优解、非控解、或似非控解。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

集值优化 [set-valued optimization]　集值优化问题由三元组 $(A, F, \prec)$ 组成，其中 A 是决策集合，F 是一个集合值函数，“$\prec$”是多目标空间 $F(A) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in A} F(\boldsymbol{x})$ 上的偏好。对于点对 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \in A \times F(A)$，如果 $\boldsymbol{y}^0 \in F(\boldsymbol{x}^0)$，且 $\boldsymbol{y}^0$ 是 $F(A)$ 的有效点、或帕雷托最优点、或非控点、或似非控点。则称点对 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ 为集值优化问题的最优解。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

锥凸函数 [cone convex function]　设 $\boldsymbol{f} : K \to Y$ 是一个向量值函数，X 和 Y 是两个线性空间，K 是 X 中的非空凸子集。设 $C \subset Y$ 是 Y 中的一个非空凸锥。

如果对任意 $x_1, x_2 \in K$，$\lambda \in [0, 1]$，

$$\boldsymbol{f}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in \lambda \boldsymbol{f}(x_1) + (1 - \lambda)\boldsymbol{f}(x_2) - C,$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 凸函数。如果 $-\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 凸的，则称 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 凹的。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

锥拟凸函数 [cone quasi-convex function]　设 $\boldsymbol{f} : K \to Y$ 是一个向量值函数，其中 X 和 Y 是两个线性空间,K 是 X 中的非空凸子集。设 $C \subset Y$ 是 Y 中的一个非空凸锥。

如果对 $y \in Y$，$x_1, x_2 \in K$，$\lambda \in [0, 1]$，$\boldsymbol{f}(x_1), \boldsymbol{f}(x_2) \in y - C$，有 $\boldsymbol{f}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in y - C$，则称 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 拟凸函数。如果 $-\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 拟凸的，则称 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上是 C 拟凹的。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

真锥拟凸函数 [proper cone quasi-convex function]　设 $\boldsymbol{f} : K \to Y$ 是一个向量值函数，X，Y 是两个线性空间，K 是 X 中的非空凸子集。设 $C \subset Y$ 是一个非空凸锥。如果对于 $x_1, x_2 \in K$，$\lambda \in [0, 1]$，有

$$\boldsymbol{f}(x_1) \in \boldsymbol{f}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + C$$

或

$$\boldsymbol{f}(x_2) \in \boldsymbol{f}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C,$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 为 K 上的真 C 拟凸函数。如果 $-f$ 在 K 上是真 C 拟凸函数，则称 f 在 K 上是真 C 拟凹函数。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

自然锥拟凸函数 **[naturally cone quasi-convex function]**　设 $\boldsymbol{f}: K \to Y$ 是一个向量值函数，其中 X，Y 是两个线性空间，K 是 X 中的非空凸子集。如果对 $x_1, x_2 \in K$，$\lambda \in [0,1]$，

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \mathrm{co}(f(x_1) \bigcup f(x_2)) - C$$

其中 $\mathrm{co}(A)$ 表示集合 A 的凸包，则称 $\boldsymbol{f}$ 为 K 上的自然 C 拟凸函数。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

近似有效点 **[ϵ-efficiency]**　设 Y 是一个线性空间，$A \subset Y$ 是 Y 的一个子集，$C \subset Y$ 是 Y 中的一个凸锥，$\epsilon > 0$，对于点 $y_\epsilon \in A$，如果在 A 中不存在一个点 y，使得

$$y_\epsilon \in y + C_{\epsilon c^0},$$

其中 $C_{\epsilon c^0} = \epsilon c^0 + C \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，则称点 y_ε 为 A 关于点 $c^0 \in \mathrm{int}C$ 的 ϵ 有效点。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

广义的斯莱特约束规格 **[generalized Slater constraint qualification]**　设 $\boldsymbol{g}: X \to Z$ 是一个向量值函数，X，Z 是两个拓扑线性空间，$P \subset Z$ 是一个非空凸锥，一个多目标优化问题的约束集合为 $A = \{x \in X | \boldsymbol{g}(x) \in -P\}$。如果存在 $x' \in A$ 使得

$$\boldsymbol{g}(x') \in \mathrm{int}P,$$

其中 $\mathrm{int}P$ 是凸锥 P 的拓扑内部，则称此多目标优化问题满足广义的斯莱特约束规格条件。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

本森真有效点 **[Benson proper efficiency]**　设 Y 是一个拓扑线性空间，$C \subset Y$ 是 Y 上的非空凸锥，$A \subset Y$ 是一个非空子集，对于点 $\bar{y} \in A$，如果

$$\mathrm{Clcone}(A + C - \bar{y}) \bigcap (-C) = \{\boldsymbol{0}\}$$

其中 $\mathrm{Clcone}(K)$ 是集合 K 的闭锥包，则称 $\bar{y}$ 为 A 关于凸锥 C 的本森真有效点。真有效点集合是有效点集中除去那些“不好”的点后形成的子集。除了本森真有效点外，还有其他不同定义的真有效点概念。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

非线性标量函数 **[nonlinear scalar function]**　设 Y 是一个拓扑线性空间，$C \subset Y$ 是一个具非空内部 $\mathrm{int}C$ 的凸锥。设 $e \in \mathrm{int}C$，$a \in Y$ 。一个非线性数值函数 ξ_{ea} 定义成

$$\xi_{ea}(y) = \min\{t \in R | y \in a + te - C\}, \quad y \in Y。$$

非线性标量函数亦称格斯特维茨 (Gersterwitz) 函数或最小严格单调函数。非线性标量函数是齐次、严格序单调的，次可加的，在一定条件下是连续的数值函数。此函数可以将某些求弱解的非凸多目标优化问题转化成一个数值优化问题。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

向量变分不等式 **[vector variational inequality]**　是通常的变分不等式的推广，可以刻画向量优化问题有效解的特征。设 X 和 Y 是两个拓扑向量空间，$C \subset Y$ 是 Y 中的非空凸锥，$K \subset X$ 是非空子集。记 $L(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的所有线性连续映射的集合。对于 $l \in L(X,Y)$，用 $< \boldsymbol{l}, \boldsymbol{x} >$ 记线性向量值映射 $\boldsymbol{l}$ 在 $\boldsymbol{x} \in X$ 点的值。一个向量变分不等式是寻找一个点 $\boldsymbol{x}^* \in K$，使得

$$< T(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* > \notin -C \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \forall \boldsymbol{x} \in K,$$

其中 T 是从 K 到 $L(X,Y)$ 的一个映射。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

向量变分原理 **[vector variational principle]**　亦称广义变分原理，它是埃克兰 (Ekeland) 变分原理的一个推广。向量变分原理可以刻画向量优化问题近似有效解的特征。

向量变分原理有不同的类型。塔默 (Tammer) 提出的向量变分原理在形式上很接近传统的埃克兰变分原理：设 Y 是一个拓扑向量空间，C 是 Y 中的凸锥，$\mathrm{int}C$ 是 C 的拓扑内部，$c_0 \in \mathrm{int}C$，X 是一个实巴拿赫空间。设 $f: X \to Y$ 是锥下半连续的且在 X 上是锥下有界的。给定一个正数 $\epsilon > 0$，$f(x^0) \in K$ 是 $f(K)$ 上的 ϵ 有效点。则存在一点 $\boldsymbol{x}_\epsilon \in K$，使得

(1) $\boldsymbol{x}_\epsilon$ 是 $f(K)$ 的弱 ϵ 有效点；

(2) $||\boldsymbol{x}_\epsilon - \boldsymbol{x}_0|| \leqslant \sqrt{\epsilon}$；

(3) $f(\boldsymbol{x}) - f(\epsilon) + \sqrt{\epsilon}||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\epsilon|| \notin -\mathrm{int}C, \forall \boldsymbol{x} \in K$。

（执笔：陈光亚　校阅：傅俊义）

17.5　动 态 规 划

动态规划 **[dynamic programming]**　最优化的一个分支，是处理多阶段决策优化问题的一种有效方法。多阶段决策问题具有明确的阶段 (时段) 性，在每个阶段开始都需要作出决策 (决定)，对应于选取的决策有一个阶段效益值。各

阶段决策构成的决策序列称为问题的一个策略，各阶段效益之和即为相应策略的总效益。使总效益达到最优的策略，称为问题的最优策略。用动态规划方法求这类问题的最优策略，需要定义状态变量 (向量) 描述求解过程中各个阶段开始时的状态的值。把阶段数为 m 的问题分为仅为一个阶段、包含连续二个阶段，……连续包含 $m-1$ 个阶段，包含 m 个阶段的子问题，并对每一个子问题用动态规划贝尔曼最优性原理导出最优性方程，用逆序法或顺序法逐次求解，最终求得原问题的最优解。上述多阶段决策问题也包括时间连续、确定性的与随机性的各种问题，以及某些无阶段特征的离散型问题。在科学管理、系统工程、自动控制工程与生物信息学等领域中有广泛的应用。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

贝尔曼最优性原理 [Bellman principle of optimality] 若将优化问题看作一个过程，贝尔曼 (R. Bellman) 对最优化原理作如下表述：“一个过程的最优策略具有这样的性质，即无论其初始状态及初始决策如何，其以后诸决策对以前阶段决策所形成的状态为初始状态的过程而言，必须构成最优策略。” 若将序贯决策问题分为前段与后段两个子问题，则最优性原理可以简述为：最优策略的后部子策略必定是以其前部子策略形成的状态为起点的后部子问题的最优策略。对于满足原理要求的序贯决策问题，可应用此原理导出相应的最优性方程，进行定性或定量计算研究。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

嵌入原理 [imbedding principle] 对于研究的问题，若能从问题的类型与特殊性出发，找到与原问题类型相似的一族问题，使得原问题是该问题的一个特例，且在该族问题中存在另一个可解的特例，根据该族问题的模型的一般与特殊的关联关系，可以找到原问题的解决方法。这种将原问题放在一族问题的集合中成为它的一个成员并使问题得到解决的方法，称为嵌入原理。动态规划的最优性原理与算法就是一种嵌入原理的实现。

(执笔：赖炎连　校阅：刘克)

动态规划最优性方程 [dynamic programming equation of optimality] 应用贝尔曼最优性原理解序贯决策问题时，先分析阶段之间的联系与影响，定义各阶段开始时刻的状态变量 (向量)$\boldsymbol{s}_k(k=1,2,\cdots,n-1,n)$ 以描述求解过程中各阶段的状态变化。每个阶段随问题有相应的决策集合 U_k，第 k 阶段选取的决策 $u_k \in U_k$。上一阶段的状态与选取的决策确定下一阶段的状态。用于描述状态转移 (变化) 的关系式称为状态转移方程。若问题满足两个条件：① 目标函数即总效益满足阶段可加性；②状态转移满足无后效性 (马尔可夫性)，即本阶段的状态只由前一阶段的状态与决策决定，与以前各阶段的状态与决策的选择无关。应用贝尔曼最优性原理，可得最优性方程

$$f_{k+1}(\boldsymbol{s}_{k+1}) = \max_{u_{k+1}(\boldsymbol{s}_{k+1})} \{v_{k+1}(\boldsymbol{s}_{k+1}, u_{k+1}(\boldsymbol{s}_{k+1})) + f_k(\boldsymbol{s}_k)\},$$

$$f_1(\boldsymbol{s}_1) = v_1(\boldsymbol{s}_1, u_1), k = 1, 2, \cdots, n-1。$$

其中 u_1已知，v_{k+1} 为第 $k+1$ 阶段的状态 s_{k+1} 选取决策为 u_{k+1} 时的阶段效益值，$f_k(\boldsymbol{s}_k)$ 为从第 k 阶段的初始状态 $\boldsymbol{s}_k$ 至最后阶段为止的各阶段均采取最优决策后的后部子问题的最优效益值。应用上述递推关系式，可逐次求得各阶段的最优决策子问题的最优目标函数值及最终可求得原问题的最优目标值与最优解。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

动态规划算法 [dynamic programming algorithm] 应用动态规划最优性方程解序贯决策问题时，最优性方程有逆序式与顺序式两种形式。求解时可逐次求得仅包含一个阶段，包含连续两个阶段，……直至 n 个阶段的最优值函数 $f_1(\boldsymbol{s}_1)$, $f_2(\boldsymbol{s}_2), \cdots, f_n(\boldsymbol{s}_n)$ 及各阶段的最优决策 $u_1(\boldsymbol{s}_1), u_2(\boldsymbol{s}_2), \cdots, u_n(\boldsymbol{s}_n)$，由于初始状态是已知的，不论逆序式还是顺序式，都可以由初始状态确定初始决策，由已知的状态确定下一阶段的状态，从而求得全部 $f_k(\boldsymbol{s}_k)$ 与 $u_k(\boldsymbol{s}_k)$ 的值，得到最优策略与最优目标值。求解时，对有些问题也可用近似方法，即对最初阶段的 $f_1(\boldsymbol{s}_1)$ 或 $u_1(\boldsymbol{s}_1)$ 给出适当的定义，然后代入最优性方程计算，逐步进行求解。前一种方法是基于函数 $f_k(\boldsymbol{s}_k)$ 的计算，称为函数空间迭代法，后一种是基于策略 $\{u_k(\boldsymbol{s}_k)\}$ 的计算，称为策略空间迭代法。对于时间连续的问题，即使能用动态规划方法求解，其计算往往十分复杂。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

哈密顿–雅可比–贝尔曼方程 [Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) equation] 时间连续决策问题的最优决策应满足的动态规划基本方程。

对于确定性的时间连续决策问题

$$V(t_0,\ \boldsymbol{x}) = \min_{x(t)} \int_{t_0}^{T} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\mathrm{d}t \ + \ \phi(T, \boldsymbol{x}(T))$$

其中 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ 分别为状态变量函数与决策变量函数，$V(t, \boldsymbol{x})$ 为初始时刻为 t，$\boldsymbol{u}(\tau)$ $(t \leqslant \tau \leqslant T)$ 取最优决策时的最优值函数。状态变量在决策 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 确定后的轨道由状态转移方程与初始条件

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

确定。这是一个最优控制问题。在最优控制 (决策)$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*(t)$ 存在、问题有解及适当的假设条件下，$\boldsymbol{u}^*(t)$ 应满足动态规划

的基本方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})+\min_{\boldsymbol{u}(\cdot)\in\bar{U}}\{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x})g(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\}=0$$

其中 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 为容许决策函数，$\bar{U}$ 为容许决策集合。

若令 $\dfrac{\partial V}{\partial x}(t,\boldsymbol{x})=\lambda(t,\boldsymbol{x})$记 $H(t,\boldsymbol{x},\lambda,\boldsymbol{u})=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\lambda(t,\boldsymbol{x})g(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$。$H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 称为哈密顿函数，$\lambda(t,\boldsymbol{x})$ 称为哈密顿乘子。则动态规划基本方程可写成

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})+\min_{u(\cdot)\in(\bar{U})}H(t,\boldsymbol{x},\lambda,\boldsymbol{u})=0$$

它也称为哈密尔顿–雅可比–贝尔曼方程。据此在某些假设条件下，可研究最优策略的性质及解法，应用动态规划研究一般性问题，难度较高也比较复杂。

(执笔：赖炎连　校阅：章祥荪)

17.6　组 合 优 化

组合优化 [combinatorial optimization]　组合优化的研究对象是有限集合上的极值问题。一个组合优化问题由三部分构成：已知条件的输入，可行解的描述，目标函数的定义。组合优化问题依据计算复杂性可以分为两类：*P 问题*类和*NP 难问题*类；属于前者的问题有*多项式时间算法*，属于后者的问题一般认为不存在多项式时间算法，通常采用*穷举法*、*启发式算法*和*近似算法*等方法求解。组合优化是 20 世纪 60 年代逐渐发展起来的一个交叉学科分支。它的理论基础是计算复杂性理论，与图论、组合学、数理逻辑等有密切关系，并且在计算机科学、信息科学、管理科学和生命科学等学科有广泛的应用。

(执笔：胡晓东　校阅：王建方)

穷举法 [exhausting (brute-force) method]　求解优化问题时，考虑所有可能的情况或者计算出所有的可行解，然后从中选取最优解的方法。由于用穷举法的思想设计的算法尽管比较简单，但是运行时间长，故通常仅限于处理规模比较小的问题。另外，它有时也用于求解原问题的子问题，或者在算法的一些步骤中使用穷举法的思想。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

精确算法 [exact algorithm]　若一个算法对于所求 (优化) 问题的任意一个实例都可以计算出 (最优) 解，则称它为精确算法。解线性规划的单纯形法即是一个精确算法。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

近似算法 [approximation algorithm]　若一个多项式时间算法对所求解的优化问题的任意实例都可以计算出一个近似最优解，则称它为近似算法。一般近似算法是用来求解*NP 难问题*的。度量算法近似最优程度的常见方法有两种：

(1) 近似解的目标函数值与最优解的目标函数值之差的绝对值，所有实例所产生的该差值的最大值称为绝对近似值；绝对近似值越小，算法的近似性越好。

(2) 近似解的目标函数值与最优解的目标函数值之比值，极大 (极小) 问题所有实例所产生的该比值的上 (下) 确界 α 称为近似比；α 越接近 1，算法的近似性越好。近似比为 α 的近似算法简称 α 近似算法。

通常近似算法特指绝对近似值或者近似比是可以被一个常数界定的近似算法。很少的 NP 难问题存在具有常数绝对近似值的近似算法，而很多 NP 难问题存在具有常数近似比的近似算法，还有一些 NP 难问题不存在具有常数近似比的近似算法，除非 P=NP。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

启发式方法 [heuristic method]　泛指基于某种直观想法、合理假定，或者借助于物理、化学、生命科学中的一些原理而设计的算法。它是解决优化问题的常用方法，特别是用来求解 NP 难问题。用该方法设计的算法通常是多项式时间算法，但是不能保证对所求解问题的任意实例都可以求出最优解或者近似最优解，其有效性一般是通过计算机模拟来验证的。常见的这类算法包括*遗传算法*、*演化算法*、*人工神经网络*、*模拟退火方法*等。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

指数时间算法 [exponential-time algorithm]　若一个算法的计算时间是其所求解问题的输入长度的一个指数函数，则称它为指数算法；其中计算时间和输入长度是以确定性图灵机为计算模型。因为指数时间算法能求解问题的规模一般都很小，所以求解实际问题时通常不采用这类算法。然而，在进行理论算法设计与分析时，会用到指数时间算法。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

多项式时间算法 [polynomial-time algorithm]　若一个算法的计算时间不超过其所求解问题的输入长度的一个多项式，则称该算法为多项式时间算法；其中计算时间和输入长度是以确定性图灵机为计算模型。通常认为只有多项式时间算法是可以求解大规模的实际问题，故多项式时间算法也称好算法或者有效算法。

若一个问题的输入仅限定于整数，而求解该问题的算法 A 的计算时间不超过其输入长度和其中整数的最大绝对值的一个多项式，则称 A 为伪多项式时间算法。若一个 NP 难问题存在伪多项式时间算法，比如，*背包问题*和*划分问题*，则可以认为它是理论上相对容易求解的困难问题。

(执笔：胡晓东　校阅：王建方)

多项式时间近似方案 [polynomial-time approximation scheme] 满足以下两个条件的近似算法系列 $\{A_\epsilon|\epsilon>0\}$ 称为多项式时间近似方案:

(1) 算法 A_ϵ 的近似比是 $(1+\epsilon)$ 或者 $(1-\epsilon)$，前者是针对极小问题，后者是针对极大问题;

(2) 算法 A_ϵ 的计算时间不超过所求解问题的输入长度和 $1/\epsilon$ 的一个多项式。

若一个 NP 难问题存在多项式时间近似方案，则可以认为它是理论上相对容易求解的困难问题。几何平面上的一些优化问题，例如，*旅行售货员问题*和*斯坦纳树问题*，都存在多项式时间近似方案。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

分而治之法 [divide and conquer method] 求解优化问题和搜索问题的一种递归方法。它首先将一个问题分解成若干个独立的子问题，然后再用同样的方法对每个子问题逐个求解，最后将所得子问题的解组合成原问题的解。通常设计这种算法时，是从原问题出发，向下分解问题；而运行算法时，是从最小 (不可分解) 的子问题开始计算，向上合成解。

(执笔：胡晓东　校阅：王建方)

分支定界法 [branch and bound method] 求解优化问题 (特别是 NP 难的组合优化问题) 的一种分而治之方法。它首先将很难处理的优化问题分解成若干独立的子问题，使得它们的最优解中至少有一个也是原问题的最优解，此过程称为分支；再通过求出与子问题相关但是容易处理的问题的最优解，得到子问题的最优解的目标函数值下界或是上界，此过程称为定界。然后将所得到界与当前原问题最好的解的目标函数值进行比较，以确定子问题的最优解是否有可能是原问题的最优解；若不可能，则无需再对该子问题进行分支。尽管分支定界方法本质上是一种穷举法，但是对于一些优化问题，它往往可以通过适当的定界方法，减少分支的次数，避免了考虑和计算每一个可行解，从而提高了算法的效率。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

贪婪算法 [greedy algorithm] 求解优化问题最常用、最简单的一类算法。在运行算法的过程中，它采用直观上看起来最好的策略：做出一个当前 (局部) 最优的选择，以期望由此可引导算法最终找到问题的一个 (全局) 最优解。

贪婪算法常常用来处理这样的组合优化问题：问题的实例包含有限多个赋权元素，问题的一个可行解是由这些元素中的一部分元素组成，其目标函数值等于这些元素权值之和。贪婪算法的基本步骤是：首先要依照一些准则，将给定的元素根据其权值，由小到大 (或者由大到小) 排一个顺序，并把空集作为一个初始可行解。然后，再依序考虑这些元素，并将所考虑的元素放入集合中除非它与已放入集合中的元素不可能组成可行解，重复此过程直到集合中的元素构成一个可行解。

用贪婪算法可以求出一些具有特殊结构 (比如拟阵) 的组合优化问题的最优解。而对一般的问题，用这类算法或者可以求得近似解，或者可以求出较好的可行解，再用其他算法，例如局部搜索算法，找到更好的可行解。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

局部搜索法 [local search method] 求优化问题的一种迭代方法。它首先计算出问题的一个初始解，再在它的邻域内或者与其具有相似结构的解中进行搜索。若找到一个更好的解，则以该解为初始解，重复此运算过程；否则，终止运算，当前的解即为所求得的解。解线性规划的单纯性算法是一种局部搜索法。然而，对于大多数优化问题，局部搜索法并不能保证总能求得问题的 (全局) 最优解。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

随机算法 [random algorithm] 泛指运行过程中需要依据随机选择的结果来决定如何进行运算的算法。对于所解问题的同一个实例，随机算法求出的解很可能是不一样的。与确定性算法相比，随机算法一般都非常简单和快速，其有效性通常是用所求出解的目标函数值的期望来衡量的。随机算法又可分为拉斯维加斯 (Las Vegas) 算法和蒙特卡洛 (Monte Carlo) 算法两类，前者总能得到问题的一个解，而后者仅能以一定概率得到问题的一个解。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

在线算法 [online algorithm] 若问题实例中的变元不是一次性给定，而是先后给出的，则称它为在线问题；求解这类问题的算法称在线算法。在线算法仅能根据已知的变元信息，进行运算。一个在线算法的有效性通常用其所求得解的目标函数值与假定所有变元已知情况下的最优解的目标函数值之比值来衡量，极大 (极小) 问题所有实例所产生的该比值的上 (下) 确界 α 称为竞争比；α 越接近 1，在线算法的性能越好。竞争比为 α 的在线算法简称 α 竞争算法。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

判定问题 [decision problem] 答案仅有 “是” 或者 “否” 的问题称为判定问题。“一个图是否存在*哈密顿圈*?” 即是一个判定问题。优化问题可以通过解决一系列相应的判定问题来求解，而判定问题也可以通过求解一个相应的优化问题来找到答案。例如，优化问题 “求图 $G=(V,E)$ 中一条最长路”，就可以通过解决判定问题 “图 G 中是否存在长为 l 的路？” 找到解答，这只要依次取 $l=1,2,\cdots,|V|$ 即可；反之，判定问题 “图 G 中是否存在一条哈密顿圈？”，则可以通过求解优化问题 “求图 G 的一个最长圈” 得到答案 “是”(如果最

长圈包含图中所有顶点) 或者 "否" (如果最长圈不包含图中所有顶点)。

(执笔: 胡晓东 校阅: 章祥荪)

P 问题 [P-problem] P 是多项式 (polynomial) 的英文第一个字母，它代表多项式时间计算复杂性类。它是由所有多项式时间可计算的判定问题所组成的。在实践中，人们发现，多项式时间算法是一类时间有效的好计算方式。因此，在处理各种各样的实际问题时，人们总希望能找到多项式时间算法。然而，对包括旅行售货员问题在内的很多问题，人们的努力都以失败而告终。1965 年埃德蒙斯 (J. Edmonds) 提出了其著名的猜想：旅行售货员问题没有多项式时间解法。这也就是说，旅行售货员问题的判定形式不属于P 问题类。埃德蒙斯猜想是对人们美好愿望的一次挑战。1971 年库克 (S. Cook) 将埃德蒙斯猜想化为了 P 问题类是否等于NP 问题类 (简称 $\mathrm{P} \overset{?}{=} \mathrm{NP}$)。这一重要问题于 20 世纪末被列为 21 世纪数学领域最重要的七大未解问题之一。这七个问题中，庞加莱 (H. Poincaré) 猜想已经于 21 世纪初被俄国数学家佩雷尔曼 (G. Perelman) 解决；而 $\mathrm{P} \overset{?}{=} \mathrm{NP}$ 问题正等待人们倾注更多的心血与努力。

(执笔: 堵丁柱 校阅: 胡晓东)

NP 问题 [NP problem] NP 是非确定型多项式 (nondeterministic polynomial) 的英文缩写，它是指一个计算复杂性类。一个判定问题属于 NP 当且仅当这个问题是非确定型多项式时间可计算的。非确定型多项式时间是指在非确定型图灵机上使用多项式时间。而非确定型图灵机是一种计算的数学理论模型。在这种模型中，"猜" 是一种允许的计算手段。例如，为了判定一个图是否含有哈密顿圈，我们可以先猜一个可能的哈密尔顿圈，然后验证该图是否含有猜得的圈。因为在多项式时间内可以完成 "验证"，所以我们说该判定问题属于 NP 问题类。因此，NP 也被称为 "多项式时间可验证" 类。NP 是由库克 (S. Cook) 于 1971 年在其著名的对计算复杂性理论起着奠基性作用的论文中提出来的。除了 NP，他还提出了 P 问题类，及迄今为止人们所碰到的具有确定型指数时间可计算的范例。指数时间可计算的判定问题组成的类记为 EXP。理论上，人们已经证明 $\mathrm{EXP} \neq \mathrm{NP}$。但是还不知道 $\mathrm{EXP} \setminus \mathrm{NP} \neq \varnothing$，还是 $\mathrm{NP} \setminus \mathrm{EXP} \neq \varnothing$，这里 $\varnothing$ 表示空集。这是计算复杂性理论中的一个重要未解问题。当然，最重要也是最著名的未解问题是 P 是否等于 NP?

(执笔: 堵丁柱 校阅: 胡晓东)

NP 完全问题 [NP complete problem] NP 问题里最难的一类问题。所谓最难，是相对某种难易判别准则而言的。判别难易的手段称为归约，它是将一个问题转化为另一个问题的方法。如果将一个判定问题 Π 在多项式时间内按照卡普 (R. Karp) 的方式，可以 "等价地" 化为另一个判定问题 Π'，那么称 Π 可以卡普归约于 Π'。如无特别声明，NP 完全通常都是相对于卡普归约而言的。对于一个 NP 完全问题而言，NP 问题类中任何一个问题均可以在多项式时间内转化为它。因此，如果它有多项式时间算法，亦即属于P 问题类，那么 NP 问题类中任何问题均属于 P 问题类，亦即 P=NP。这样，如果 $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$，那么 NP 完全问题就不存在多项式时间算法。正是缘于这个道理，库克 (S. Cook) 在 1971 年研究埃德蒙兹猜想 (Edmonds Conjecture) 时，提出了 NP 完全的概念。埃德蒙兹 (J. Edmonds) 在 1965 年猜想，旅行售货员问题没有多项式时间算法，而库克证明了旅行售货员问题的判定形式是 NP 完全的。这样，埃德蒙兹猜想就化为了等价的 $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 猜想。至今，人们已经发现了数以千计的 NP 完全问题，它们分布于科学和工程技术的各个领域中。这些问题中，只要一个问题有多项式时间算法，那么所有的问题就都有多项式时间算法了；另一方面，只要一个问题没有多项式时间算法，那么所有的问题就都没有多项式时间算法了。这也是 $\mathrm{P} \overset{?}{=} \mathrm{NP}$ 问题为什么如此重要的原因。

(执笔: 堵丁柱 校阅: 胡晓东)

NP 难问题 [NP hard problem] 若 NP 问题类中任何一个问题均可以在多项式时间内转化为问题 Π，则称 Π 为 NP 难问题。NP 难问题类包含了 NP 完全问题类，且与其有同样的性质：如果一个 NP 难问题有多项式时间算法，亦即属于 P 问题类，那么 NP 问题类中任何问题均属于 P 问题类，亦即 P=NP。

给定一个组合优化问题 Π 和一个多项式函数 $p(\cdot)$，用 Π_p 表示问题 Π 的这样一些实例 I 的集合，I 的输入仅限定于整数，总长度为 I_L，且其中整数绝对值不超过 $p(I_L)$。称问题 Π 为强 NP 难的，如果存在多项式 $p(\cdot)$ 使得 Π_p 是 NP 难问题。强 NP 难问题不存在伪多项式时间算法，除非 P =NP。

(执笔: 堵丁柱 校阅: 胡晓东)

欧拉公式 [Euler formula] 若一个连通平面图有 n 个顶点，m 条边和 r 个面，则

$$n - m + r = 2。$$

一般情况，若一个平面图有 n 个顶点，m 条边，r 个面和 t 个分支，则

$$n - m + r = 1 + t。$$

欧拉公式有许多应用。例如，任意一个含有 n 个顶点和 m 条边的平面图都满足 $m \leqslant 3n - 6$；而含有 n 个顶点的最大平面图有 $3n - 6$ 条边。

(执笔: 王建方 校阅: 胡晓东)

拉姆齐图 **[Ramsey graph]** 给定任意两个正整数 k 和 l，存在一个最小整数 $r(k,l)$，使得每个有 $r(k,l)$ 个顶点的图，或者包含一个有 k 个顶点的团，或者包含一个有 l 个顶点的独立集。$r(k,l)$ 称为拉姆齐数(Ramsey number)，这是因为 1930 年拉姆齐 (F. P. Ramsey) 首先证明了它的存在性。确定拉姆齐数是非常困难的；迄今为止，仅对比较小的 k,l，得到了 $r(k,l)$ 的准确值。

图 G 称为 (k,l) 拉姆齐图，如果它含有 $r(k,l)-1$ 个顶点，且它既不包含 k 个顶点的团，也不包含 l 个顶点的独立集。

(执笔：胡晓东　校阅：王建方)

集合覆盖 **[set cover]** 有限集合 S 的子集族 $\mathcal{C}$ 的一个子族 $\mathcal{C}'$ 是 S 的一个集合覆盖，如果 S 中的每一个元素属于 $\mathcal{C}'$ 中至少一个子集。最小集合覆盖是含有最少子集的集合覆盖。求最小集合覆盖是一个 NP 难问题。当子集族 $\mathcal{C}$ 中的每一个子集被赋予了一个非负权值时，最小 (权) 集合覆盖是指该集合覆盖所含子集的权和最小。贪婪算法是求解最小集合覆盖问题的 $(1+\ \ln|S|)$ 近似算法，且该问题不存在 $(1-\epsilon)\ln|S|$ 近似算法，除非 $\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{DTIME}(n^{\log\log n})$。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

顶点覆盖 **[vertex cover]** 图 $G=(V,E)$ 的一个顶点子集 $V'\subset V$ 称为顶点覆盖，如果边集 E 中的每一条边都至少有一个端点在 V' 中。最小顶点覆盖是含有最少顶点的顶点覆盖。顶点覆盖是集合覆盖的一个特例。在二部图中，最小顶点覆盖含有的边数等于最大匹配含有的边数。求任意图的最小顶点覆盖是一个 NP 难问题，它存在 2 近似算法，且一般猜测不存在更好的近似算法。

(执笔：胡晓东　校阅：章祥荪)

k **割** **[*k*-cut]** 设图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 可划分为 k 个互不相交的子集合，$V_1,V_2,\cdots,V_k$，$2\leqslant k\leqslant|V|$。边集 E 中两个端点不在同一个顶点子集的边组成的集合称为 k 割。若 E 中的每一条边赋有权值，则该 k 割集的权值等于它所含边的权值的总和。求边赋权图的最大 k 割集问题和最小 k 割集问题都是 NP 难的，它们分别存在 $(1/(1-1/k+2\ln k/k^2))$ 近似算法和 $(2-2/k)$ 近似算法。

(执笔：胡晓东　校阅：王建方)

拟阵 **[matroid]** 称一个有限集合系统 $(E,\mathscr{I})$ 是拟阵，如果它满足：

(1) $\phi\in\mathscr{I}$。

(2) 若 $X\subseteq Y\in\mathscr{I}$，则 $X\in\mathscr{I}$。

(3) 若 $X,Y\in\mathscr{I}$ 且 $|X|>|Y|$，则存在 $x\in X\setminus Y$ 使得 $Y\cup\{x\}\in\mathscr{I}$。

若 $(E,\mathscr{I})$ 是一个拟阵，则称 $\mathscr{I}$ 中的子集为独立集，基为最大独立集。拟阵是线性独立概念的抽象化和推广。设 E 是一个有限向量集，$\mathscr{I}$ 是 E 的全部线性独立子集组成的子集族，则 $(E,\mathscr{I})$ 即是一个拟阵。若 $(E,\mathscr{I})$ 仅满足上述条件 (1) 和 (3)，则称它为广义拟阵。

称一个拟阵 $(E,\mathscr{I})$ 是两个拟阵的交，如果存在两个拟阵 $(E,\mathscr{I}_1)$ 和 $(E,\mathscr{I}_2)$ 使得 $\mathscr{I}=\mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2$。求平面图的最短路问题、偶图的最大匹配问题、网络上的最大流问题均可化为两个拟阵交的问题。

定向拟阵可视为一个组合抽象实数上有限多个点的构形，它大致可用赋有定向的基的拟阵刻画。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

模函数 **[modular function]** 设 U 是一个有限集合，它的所有子集构成的集合记为 2^U。称一个函数 $f:\ 2^U\to\mathbb{R}$ 是次模函数，如果对所有 $X,Y\subseteq 2^U$ 有

$$f(X\cap Y)+f(X\cup Y)\leqslant f(X)+f(Y)。$$

称 $f(\cdot)$ 是一个超模函数，如果对所有 $X,Y\subseteq 2^U$，有

$$f(X\cap Y)+f(X\cup Y)\geqslant f(X)+f(Y)。$$

称 $f(\cdot)$ 是一个模函数，如果对所有 $X,Y\subseteq 2^U$，有

$$f(X\cap Y)+f(X\cup Y)=f(X)+f(Y)。$$

(次、超) 模函数可用于设计求解组合优化问题的算法。例如，给定一个图 $G=(V,E)$ 及其顶点子集 $X\subset V$，用 $\delta(X)$ 表示割集，$c(\delta(X))$ 表示其容量。则 $f(X)\equiv c(\delta(X))$ 是一个次模函数，且 $f(X)=f(V(G)\setminus X)$，即 $f(\cdot)$ 是一个对称次模函数。最小割算法就是求容量图上的最小对称次模函数，而求最大流的算法即为求最小对称次模函数。另外，拟阵的秩函数是次模函数。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

组合多面体 **[combinatorial polyhedron]** 若一个多面体的极点与某个组合结构 (如匹配、独立集等) 的特征向量之间存在一一对应关系，则称它为组合多面体。

(执笔：王建方　校阅：胡晓东)

斯坦纳树问题 **[Steiner tree problem]** 给定欧式平面上 n 个点，如何用线段将它们连接成一个连通的网络，使得线段长度之和最小？费马 (P. Fermat) 和高斯 (C. F. Gauss) 等曾先后研究过这个最短网络问题 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形，库朗 (R. Courant) 和罗宾逊 (H. Robbinson)1941 年称此问题为斯坦纳树问题，这一命名一直沿用至今，现亦称欧式平面上斯坦纳最小树问题。最短网络一定是树，称斯坦纳树，它含有的线段的端点有可能不是给定的 n 个点，称它们为斯坦纳

点。每个斯坦纳树最多含有 $n-2$ 个斯坦纳点，而每一个斯坦纳点一定是三个线段的端点，它们相互之间的夹角为 $120°$。斯坦纳树问题是 NP 难的，存在多项式时间近似方案。若要求连通网络中每条线段的端点都是给定的 n 个点，则最短网络是最小支撑树，它是斯坦纳最小树的一个 $2/\sqrt{3}$ 近似解。

图上的斯坦纳树问题是，给定边赋权连通图 $G=(V,E)$，及顶点子集 $P\subset V$，求连接 P 中所有顶点的最小树；树中可能含有不属于 P 的点，称为斯坦纳点。该问题也是 NP 难的，存在 1.55 近似算法。最短路问题和最小支撑树问题可视为斯坦纳树问题的两个特例，前者 $|P|=2$，而后者 $P=V$。

（执笔：王建方　校阅：胡晓东）

排序问题 **[scheduling problem]**　亦称时间表问题 (timetable problem)。排序问题是考虑，用一台或多台机器加工两个或两个以上的工件时，如何确定加工顺序以使效率最高。该问题也称为时间表问题。衡量效率的尺度很多；例如，最迟完工时间，最大延误时间、总延误时间、总加工时间等。该问题也可以附加一些约束条件；例如，工件的准备时间、交付时间、工件在每台机器上的加工次序等。这些问题大部分都属于 NP 难问题；组合优化中的第一个近似算法就是格雷汉姆 (R. Graham) 研究排序问题时提出的。

（执笔：王建方　校阅：胡晓东）

装箱问题 **[bin packing problem]**　给定容积都为 B 的若干箱子和有限多个物品，其中每一个物品 u 都有一个非负尺寸 $s(u)<B$。装箱问题是考虑如何将这些物品都放进箱子中，使得每一个箱子中所装物品的尺寸之和都不超过 B，且使用的箱子个数最少。这是一个 NP 难问题，它存在渐近多项式时间近似方案，但不存在 $\left(\dfrac{3}{2}-\epsilon\right)$ 近似算法，除非 $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$。另外，在线装箱问题存在竞争比为 1.5887 的在线算法，但不存在竞争比小于 1.540 的在线算法。

（执笔：胡晓东　校阅：章祥荪）

可满足问题 **[satisfiability problem]**　给定 m 个布尔和式，$C_1,C_2,\cdots,C_k$，每个 C_i 是 n 个布尔变量，x_1，$x_2,\cdots,x_n$，中若干 x_j 或者 $\bar{x}_j$ 的布尔和。判断是否存在这 n 个变量的 0-1 赋值使得所有这 m 个和式都为 1 称为可满足问题。它是第一个被证明为 NP 完全的问题。最大可满足问题是求 n 个变量的 0-1 赋值使得尽可能多的和式为 1，它存在 1.2987 近似算法。

（执笔：胡晓东　校阅：章祥荪）

划分问题 **[partition problem]**　给定含有 n 个正整数的一个集合 S，判断是否可将 S 划分为两个互不相交的子集合，使得两个子集合中的正整数之和相等，称为划分问题。该问题是 NP 完全的，它存在伪多项式时间算法。

（执笔：胡晓东　校阅：章祥荪）

***k* 中心和 *k* 均位问题** **[*k*-center and *k*-median problems]**　给定完全图 $G=(V,E)$，及顶点集 V 中两顶点之间的距离 (满足三角不等式)，k 中心问题是求 V 的一个包含 k 个顶点的子集 C(其中顶点称为中心)，使得 V 中任意一点到最近一个中心的距离的最大值最小。k 均位问题是求 V 的一个包含 k 个顶点的子集 C(其中顶点称为均位)，使得 V 中任意一点到最近一个均位的距离之和最小。这两个问题都是 NP 难的，k 中心问题存在 2 近似算法，且不可能存在更好的近似算法，除非 P=NP，而 k 均位问题存在 $6\dfrac{2}{3}$ 近似算法。

（执笔：胡晓东　校阅：章祥荪）

选址问题 **[facility location problem]**　给定完全图 $G=(V,E)$，及顶点集 V 中两顶点 u 和 v 之间的距离 $c(u,v)$(满足对称性和三角不等式)；另给子集 $F\subset V$，其中的每个顶点 $v\in F$ 都可选为场址，但有建场费用 $f(v)$，而对于 V 中每一个顶点 v 都有一个非负需求 $d(v)$。选址问题是求 F 的一个包含 k 个顶点的子集合 F'，使得

$$\sum_{v\in F'} f(v)+\sum_{u\in F'}\sum_{v\in V} d(v)\cdot c(u,v)$$

最小。这个问题是 NP 难的，它有 1.52 近似算法，且不存在 1.48 近似算法，除非 P=NP。

（执笔：胡晓东　校阅：章祥荪）

网络流理论 **[network flow theory]**　在图论和组合优化中，网络流泛指给有向图中的每一条弧分配一个流值使其不超过弧的容量。网络流理论是图论和数学规划，特别是线性规划，相结合所产生的一个交叉分支，它主要研究网络上的优化问题及其求解方法。1955 年哈里斯 (T. Harris) 在研究铁路网的最大通过能力时首先提出，在给定的一个网络中求某两点间的最大运输量问题。1956 年福特 (L. Ford) 和富尔克森 (D. Fulkerson) 指出最大流的流值等于最小割的容量这个重要的事实，并根据这一原理设计了用标号法求最大流的方法。随后一系列网络流问题的提出及相关研究大大地促进了运筹学的发展以及应用。

（执笔：王建方　校阅：胡晓东）

最大流问题 **[maximum flow problem]**　在一个网络 $D=(V,A)$ 中，弧 $a_{ij}=(v_i,v_j)\in A$ 上的权值 $c(a_{ij})\geqslant 0$ 表示 a_{ij} 的容量。由流源点 $s\in V$ 到流汇点 $t\in V$ 的一个可行流是满足如下条件的一个函数 $f:A\to\mathbb{R}^+$：

(1) 容量限制条件：对每条弧 $a_{ij}\in A$，

$$0\leqslant f(a_{ij})\leqslant c(a_{ij})。$$

(2) 平衡条件: 对每个既不是源点也不是汇点的顶点 v_j，

$$\sum_{a_{ij}\in A} f(a_{ij}) - \sum_{a_{ji}\in A} f(a_{ji}) = 0。$$

可行流 f 的流值

$$v(f) = \sum_{a_{si}\in A} f(a_{si}) - \sum_{a_{is}\in A} f(a_{is}),$$

且有

$$-v(f) = \sum_{a_{ti}\in A} f(a_{ti}) - \sum_{a_{it}\in A} f(a_{it})。$$

最大流问题就是求流值最大的可行流，它存在多项式时间算法。

(执笔: 王建方　校阅: 胡晓东)

最小费用流问题 [**minimum-cost flow problem**] 在一个网络 $D=(V,A)$ 中，弧 $a_{ij}=(v_i,v_j)\in A$ 有容量上界 $c(a_{ij})$ 和下界 $l(a_{ij})$，及单位流量的费用 $w(a_{ij})$。另外，每一个顶点 v_i 都有一个货物供需量 $d(v_i)$: 当它大于 0 时，表示该点可供给一定量的货物；当它小于 0 时，表示该点需求一定量的货物；而当它为 0 时，表示该点既不需要也不能提供货物，这样的点可以作为货物的中转点。另外，假设网络中供需是平衡的。

网络 $D=(V,A)$ 中的一个可行流是满足以下流量守恒和约束条件的函数 $f:A\to\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{a_{ij}\in A} f(a_{ij}) - \sum_{a_{ji}\in A} f(a_{ji}) = d(v_i), & v_i\in V; \\ l(a_{ij}) \leqslant f(a_{ij}) \leqslant c(a_{ij}), & a_{ij}\in A。\end{cases}$$

最小费用流问题是求一个可行流 f^* 使其费用最小，即

$$w(f*) = \min\left\{\sum_{a_{ij}\in A} w(a_{ij})f(a_{ij})\,|\,\text{可行流 } f\right\}。$$

该问题存在多项式时间算法。

(执笔: 王建方　校阅: 胡晓东)

多商品流 [**multicommodity flow**] 在一个网络 $D=(V,A)$ 中，可以有 $k\geqslant 2$ 种商品在网络中流动，它们可有不同的源点和汇点；例如，不同的工厂生产的各种各样的货物经由同一个运输网络运送到不同的消费地。此时，可用 $\boldsymbol{u}_i=(u_{ipq})$ 表示第 i 种商品在弧 (v_p,v_q) 上的流量上限，用 $\boldsymbol{u}=(u_{pq})$ 表示所有 k 种商品在弧 (v_p,v_q) 上的流量总和的上限；另用 $\boldsymbol{c}_i=(c_{ipq})$ 表示第 i 种商品在弧 (v_p,v_q) 上单位流量的费用，再用 $\boldsymbol{b}_i=(b_{ip})$ 表示第 i 种商品在点 v_p 处的供需量。这样多商品的最小费用流问题即可表示为

$$\min \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{f}_i$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{f}_i \leqslant \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{b}_i, \quad i=1,2,\cdots,k \\ \boldsymbol{0}\leqslant \boldsymbol{f}_i \leqslant \boldsymbol{u}_i, \quad i=1,2,\cdots,k \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{f}_i=(f_{ipq})$ 表示第 i 种商品在弧 (v_p,v_q) 中的流量，$\boldsymbol{A}$ 是网络 D 的关联矩阵。尽管多商品流没有单商品流所具有的一些好性质，但是它有特殊的块状结构，因而可用分解技巧求解。

(执笔: 王建方　校阅: 胡晓东)

增益网络流 [**network flow with gain**] 主要用于刻画网络中流损失的情形。在一个网络 $D=(V,A)$ 中，设顶点 s 和 t 分别为流的源点和汇点。若用 $c(a_{ij})$ 表示弧 $a_{ij}=(v_i,v_j)$ 的弧容量，$f^{\mathrm{I}}(a_{ij})$ 表示流入 a_{ij} 尾部 v_j 的流值，$f^{\mathrm{O}}(a_{ij})$ 表示流入 a_{ij} 头部 v_i 的流值，$g(a_{ij})$ 表示 a_{ij} 的弧增益数，则有

$$f^{\mathrm{O}}(a_{ij}) = g(a_{ij})f^{\mathrm{I}}(a_{ij})。$$

另用 f_s 表示纯流出 s 的流量，f_t 表示纯流入 t 的流量。一个流 $f=(f^{\mathrm{I}},f^{\mathrm{O}})$ 是可行的，如果它满足以下两个条件:

$$f^{\mathrm{I}}(a_{ij}) \leqslant c(a_{ij});$$

$$\sum_{v_j} f^{\mathrm{O}}(a_{ij}) - \sum_{v_j} f^{\mathrm{I}}(a_{ij}) = \begin{cases} f_s, & \text{当 } v_i = t; \\ -f_t, & \text{当 } v_i = s; \\ 0, & \text{其他情况。}\end{cases}$$

一个可行流 $\tilde{f}=(\tilde{f}^{\mathrm{I}},\tilde{f}^{\mathrm{O}})$ 称为最优的，如果对任意可行流 $f=(f^{\mathrm{I}},f^{\mathrm{O}})$，或者当 $f_s=\bar{f}_s$ 时，有 $f_t\leqslant\tilde{f}_t$，或者当 $f_t=\bar{f}_t$ 时，有 $f_s\geqslant\tilde{f}_s$。一个可行流被称为最优最大的，如果它既是最优也是最大的。

(执笔: 王建方　校阅: 胡晓东)

循环流 [**circulant flow**] 循环流是在网络中所有点都守恒的流，它不存在源点和汇点。循环流主要用于在弧容量有上下界的网络中，求得可行流。在一个具有源点 s 和汇点 t 的网络 $D=(V,A)$ 中，若附加一条由 t 到 s 的弧 (t,s)，并令 $l_{ts}=0, c_{ts}=\infty$，则通常的最大流问题就变成循环流问题。而最小费用循环流可以表述为

$$\min \sum_{a_{ij}\in A} w(a_{ij})f(a_{ij})$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \displaystyle\sum_{j}\Big(f(a_{ij})-f(a_{ji})\Big)=0, & \text{对所有 } v_i\in V; \\ 0\leqslant l(a_{ij})\leqslant f(a_{ij})\leqslant c(a_{ij}), & \text{对所有 } a_{ij}\in A。\end{cases}$$

许多网络优化问题都可以化为求最小费用循环流。

(执笔：王建方 校阅：胡晓东)

广义网络 [generalized network] 广义网络是最一般的网络流模型，它不仅考虑流通过一条弧时流值减少的情况，如输电网络，还考虑流值增加的情况，如外汇交易网络。在广义网络中，用多个参数表示每一条弧上流的增益和损耗。广义网络流问题仍然可以用线性规划刻画和求解。

(执笔：王建方 校阅：胡晓东)

17.7 对 策 论

对策论 [game theory] 亦称博弈论，是运筹学的一个重要分支。它所研究的是 $n(n \geqslant 2)$ 个决策者在某种对抗或竞争的局势下, 如何各自作出决策, 从而使自己得到尽可能最有利的结果。

1944 年，冯 • 诺依曼 (J. von Neumann) 和莫根施特恩 (O. Morgenstern) 出版了《博弈论与经济行为》一书，宣告了对策论的诞生，也奠定了对策论的基础。

1994 年，诺贝尔经济奖授予纳什 (J. F. Nash) 等 3 位对策论学者, 从而确认了对策论对经济理论的核心重要性。除此之外, 对策论在政治学、军事学、心理学、生物学等领域都有非常广泛和深刻的应用。

(执笔：俞建 校阅：修乃华)

正规型对策 [game in normal form] 亦称策略型对策，是非合作对策问题的一种描述方式，主要由以下几个要素组成：

(1) 局中人(player)，即对策的参与人。2 个局中人的对策，称为两人对策 (two-person game)。n 个局中人的对策，称为n 人对策(n-person game)。

(2) 策略(strategy)，即局中人的行动。每个局中人策略的全体，称为这个局中人的策略集。

(3) 支付 (payoff)，指每个局中人选择策略后所获得的收益，此收益不仅依赖于他自己策略的选择，也依赖于其他局中人策略的选择，因此它是所有局中人策略的函数，称为这个局中人的支付函数(payoff function)。

(执笔：俞建 校阅：修乃华)

矩阵对策 [matrix game] 也称两人有限零和对策，模型如下：

两个局中人 Ⅰ 和 Ⅱ。

设局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 的纯策略 (pure strategy) 集分别为 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$, 和 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$, 指局中人 Ⅱ 可以选择的行动全体。

如果 Ⅰ 选择纯策略 a_i ，Ⅱ 选择纯策略 b_j ，则 Ⅱ 支付 Ⅰ c_{ij} 。所有 $\{c_{ij}\}$ 构成一个 $m\times n$ 矩阵, 称为局中人 Ⅰ 的支付矩阵, 从而此对策称为矩阵对策。无论是局中人 Ⅰ 还是局中人 Ⅱ 都希望自己能获得最大的利益。

如果存在 $i^*(1\leqslant i^*\leqslant m)$ 和 $j^*(1\leqslant j^*\leqslant n)$ ，使

$$c_{i^*j^*}=\max_{1\leqslant i\leqslant m} c_{ij^*},\ 且\ c_{i^*j^*}=\min_{1\leqslant j\leqslant n} c_{i^*j}\ ,$$

则当 Ⅰ 选择纯策略 a_{i^*}, Ⅱ 选择纯策略 b_{j^*}, 就达到了某种平衡。可惜这样的 i^* 和 j^* 不一定存在，于是 Ⅰ 和 Ⅱ 都将尽自己最大努力不让对手猜出自己将采取的策略，他们可以用随机方法来确定自己要选取的策略。

考虑 A 和 B 上所有概率分布的集合：

$$X=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)|x_i\geqslant 0, i=1,\cdots,m,\sum_{i=1}^m x_i=1\right\};$$

$$Y=\left\{\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)|y_j\geqslant 0, j=1,\cdots,n,\sum_{j=1}^n y_i=1\right\}。$$

称 X 和 Y 分别是 Ⅰ 和 Ⅱ 的混合策略 (mixed strategy) 集。

当 Ⅰ 选择混合策略 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\in X$，Ⅱ 选择混合策略 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in Y$, 则 Ⅱ 对 Ⅰ 的期望支付是 $\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j$。

利用凸集分离定理，冯 • 诺依曼证明了以下极大极小定理：

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X}\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j=\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\max_{\boldsymbol{x}\in X}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j。$$

由此存在 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_m^*)\in X$，$\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,\cdots,y_n^*)\in Y$，使

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{\boldsymbol{x}\in X}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j^*，且$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j^*=\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j。$$

或者对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\in X$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in Y$, 有

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j^*\leqslant\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j^*\leqslant\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j。$$

$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 称为矩阵对策的一个解，或者一个鞍点(saddle point)。

矩阵对策可以用线性规划方法来求解。

(执笔：俞建 校阅：修乃华)

两人零和对策 [two-person zero-sum game] 是矩阵对策的推广，模型如下：

两个局中人 Ⅰ 和 Ⅱ。

Ⅰ 的策略集是 X，Ⅱ 的策略集是 Y，X 和 Y 是任意两个非空集合。

设 Ⅰ 选择策略 $\boldsymbol{x}\in X$，Ⅱ 选择策略 $\boldsymbol{y}\in Y$，则 Ⅱ 支付 Ⅰ $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，其中 $f:X\times Y\to\mathbb{R}$。因为此时 Ⅰ 支付 Ⅱ $-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，而 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=0$，从而此对策称为两人零和对策。

如果存在 $\boldsymbol{x}^*\in X,\boldsymbol{y}^*\in Y$，使对任意 $\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y$，有

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)=\max_{\boldsymbol{x}\in X}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*),\ \text{且}$$
$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)=\min_{\boldsymbol{y}\in Y}f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y})。$$

或者对任意 $\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y$, 有

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}),$$

则称 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是两人零和对策的一个解, 或者一个鞍点 (saddle point)。

关于两人零和对策的解，有以下存在性定理：

设 X 和 Y 分别是豪斯多夫线性拓扑空间 E 和 F 中的非空凸紧集, $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ 满足:

(1) 对任意固定的 $\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是下半连续和拟凸的,

(2) 对任意固定的 $\boldsymbol{y}\in Y,\boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是上半连续和拟凹的, 则

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X}\min_{\boldsymbol{y}\in Y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\max_{\boldsymbol{x}\in X}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。$$

即两人零和对策必有解。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

双矩阵对策 [**bimatrix game**]　也称两人非零和有限对策，模型如下：

两个局中人 Ⅰ 和 Ⅱ。

Ⅰ 和 Ⅱ 的纯策略集分别为 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$。

如果 Ⅰ 选择纯策略 a_i ，Ⅱ 选择纯策略 b_j ，则 Ⅰ 得到的支付是 c_{ij} ，Ⅱ 得到的支付是 d_{ij}。至少存在某 i 和某 j, 使 $c_{ij}+d_{ij}\neq 0$。如果存在某 i 和某 j, 使 $c_{ij}>0,d_{ij}>0$, 则当 Ⅰ 选择纯策略 a_i, Ⅱ 选择纯策略 b_j, 会出现双赢的局势。因为所有 $\{c_{ij}\}$ 和 $\{d_{ij}\}$ 分别构成两个 $m\times n$ 矩阵, 从而此对策称为双矩阵对策。

Ⅰ 和 Ⅱ 的混合策略集分别是$X=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)|x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m,\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$，和 $Y=\left\{\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)|y_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^{n}y_i=1\right\}$。

如果 Ⅰ 选择混合策略 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\in X$, Ⅱ 选择混合策略 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in Y$,则 Ⅰ 和 Ⅱ 得到的期望支付分别是 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}d_{ij}x_iy_j$。

如果存在 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_m^*)\in X$,　$\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,\cdots,y_n^*)\in Y$，使

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{\boldsymbol{x}\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j^*,$$

且

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{\boldsymbol{y}\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_i^*y_j,$$

则称 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 为此双矩阵对策的纳什平衡点。

双矩阵对策的纳什平衡点必存在, 但是不一定唯一。

双矩阵对策的纳什平衡点可以用数学规划中的拉姆克–豪森 (Lamke-Howson) 算法来求解。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

n* 人非合作有限对策** [n*-person finite non-cooperative game**]　由纳什 (J. F. Nash) 提出, 模型如下:

设 $N=\{1,\cdots,n\}$ 为局中人的集合。

对任意 $i\in N$, 第 i 个局中人的纯策略集是 $S_i=\{s_{i1},\cdots,s_{im_i}\}$, 混合策略集是 $X_i=\{\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\cdots,x_{im_i})|x_{ik}\geqslant 0,k=1,\cdots,m_i,\sum\limits_{k=1}^{m_i}x_{ik}=1\}$。当第 i 个局中人选择纯策略 s_{ik_i} 时, 其得到的支付为 $R_i(s_{1k_1},\cdots,s_{nk_n})$。这样,对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$, 即第 i 个局中人选择混合策略 $\boldsymbol{x}_i$ 时，$i=1,\cdots,n$，第 i 个局中人的期望支付为

$$f_i(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}R_i(s_{1k_1},\cdots,s_{nk_n})\prod_{i=1}^{n}x_{ik_i}。$$

对任意 $i\in N$，记 $\hat{i}=N\setminus i$。如果存在 $\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{x}_1^*,\cdots,\boldsymbol{x}_n^*)\in\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$, 使对任意 $i\in N$, 有

$$f_i(\boldsymbol{x}_i^*,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)=\max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i}f_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*),$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是此 n 人非合作有限对策的纳什平衡点，此时每个局中人都不能通过单独改变自己的策略而使自己获得更大的利益。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

纳什平衡点 [**Nash equilibrium**]　非合作博弈论中最重要、最核心的概念。

1950 年和 1951 年，纳什分别应用非线性分析中布劳威尔 (Brouwer) 不动点定理和角谷 (Kakutani) 不动点定理证明了：任何 n 人非合作有限对策，其纳什平衡点必存在。但是许多 n 人非合作有限对策往往有不止一个纳什平衡点。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

n* 人非合作对策** [n*-person non-cooperative game**] 是 n 人非合作有限对策的推广, 模型如下:

设局中人集合 $N=\{1,\cdots,n\}$。

对任意 $i\in N$, 第 i 个局中人的策略集是 X_i,支付函数是

$f_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$。

对任意 $i \in N$, 记 $\hat{i} = N \setminus i$。如果存在 $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$，使对任意 $i \in N$，有

$$f_i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*) = \max_{u_i \in X_i} f_i(u_i, \boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*),$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是此 n 人非合作对策的纳什平衡点。此时每个局中人都不能通过单独改变自己的策略而使自己获得更大的利益。

以下是纳什平衡点的存在性定理：

如果对任意 $i \in N$, X_i 是豪斯多夫线性拓扑空间 E_i 中的非空凸紧集, $f_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ 连续, 且对任意固定的 $\boldsymbol{x}_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$,$u_i \to f_i(u_i, \boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X_i 上是拟凹的, 则此对策的纳什平衡点必存在。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

连续对策 [continuous game]　$N = \{1, \cdots, n\}$ 是局中人的集合，对任意 $i \in N$，第 i 个局中人纯策略集是 X_i，S_i 是 X_i 上所有概率测度 μ_i(也称混合策略) 的空间，第 i 个局中人的支付函数

$$u_i(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \int_X f_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu_1 \cdots \mathrm{d}\mu_n,$$

其中 $f_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ 是第 i 个局中人在纯策略组合集 X 上的支付函数。

对任意 $i \in N$, 记 $\hat{i} = N \backslash i$。如果存在 $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \cdots, \mu_n^*) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 使对任意 $i \in N$, 有

$$u_i(\mu_i^*, \mu_{\hat{i}}^*) = \max_{\mu_i \in S_i} u_i(\mu_i, \mu_{\hat{i}}^*),$$

则此 μ^* 是此对策的纳什平衡点。

因为一般要求对任意 $i \in N$, f_i 在 X 上连续, 所以这一对策称为连续对策。又因为对任意 $i \in N$, X_i 一般是无限集, 所以这一对策也称为无限对策(infinite game)。

以下是连续对策纳什平衡点的存在性定理：

如果对任意 $i \in N$, X_i 是紧度量空间,$f_i : X \to \mathbb{R}$ 连续, 则此连续对策的纳什平衡点必存在。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

广义对策 [generalized game]　设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 为局中人的集合。

对任意 $i \in N$，第 i 个局中人的策略集是 X_i，支付函数是 $f_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$。记 $\hat{i} = N \setminus i$。第 i 个局中人的可行策略映射是 $G_i : X_{\hat{i}} \to 2^{X_i}$。如果对任意 $i \in N$，对任意 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, $G_i(x_{\hat{i}}) = X_i$，则此对策即为 n 人非合作对策，从而此对策称为广义对策。又因为 $G_i(x_{\hat{i}}) \subset X_i$，第 i 个局中人的可行策略有所约束，此对策也称为约束对策(constrained game)。

如果存在 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$, 使对任意 $i \in N$, 有 $x_i^* \in G_i(x_{\hat{i}}^*)$, 且

$$f_i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \max_{u_i \in G_i(x_{\hat{i}}^*)} f_i(u_i, x_{\hat{i}}^*),$$

则称 x^* 是此广义对策的平衡点。

以下是广义对策平衡点的存在性定理：

如果对任意 $i \in N$，X_i 是豪斯多夫局部凸线性拓扑空间 E_i 中的非空凸紧集，$f_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ 连续，且对任意固定的 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$，$u_i \to f_i(u_i, x_{\hat{i}})$ 在 X_i 上是拟凹的，又集值映射 G_i 连续，且对任意 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$， $G_i(x_{\hat{i}})$ 是非空凸紧集，则此广义对策的平衡点必存在。

1954 年，阿罗 (K. J. Arrow) 和德布鲁 (G. Debreu) 应用广义对策平衡点的存在性定理证明了数理经济学中一般均衡的存在性定理。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

囚徒难题 [prisoner's dilemma]　亦称囚徒困境，1950 年由塔克 (A. W. Tucker) 提出：

在一次严重的纵火案发生后，警察在现场抓到 I 和 II 两个犯罪嫌疑人，事实是他们一起放火，但是警察并没有掌握足够的证据，于是警察将他们隔离囚禁起来，要他们各自坦白交代。如果他们都坦白，每人都将入狱一年；如果他们都不坦白，则由于证据不充分，他们都将获无罪释放；如果一个坦白并愿意作证而另一个不坦白，则坦白者将获奖励，而不坦白者将入狱两年。

这个对策唯一的纳什平衡点是两个犯罪嫌疑人 I 和 II 都选择坦白并都将入狱一年，而如果都选择不坦白则都将无罪释放。

这个难题 (或困境) 表现出个人理性与集体理性的冲突，而它并不是在个别情况下才出现的。事实上，只要有利益冲突的地方，就经常有囚徒难题 (或困境) 的情况发生。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

多目标对策 [multiobjective game]　设局中人集合为 $N = \{1, \cdots, n\}$，对任意 $i \in N$，X_i 是第 i 个局中人的策略集，$\boldsymbol{F}^i = \{f_1^i, \cdots, f_k^i\} : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}^k$ 是第 i 个局中人的向量值支付函数。对任意 $i \in N$, 记 $\hat{i} = N \setminus i$。

如果存在 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$，使对任意 $i \in N$，对任意 $y_i \in X_i$，有 $\boldsymbol{F}^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - \boldsymbol{F}^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) \notin \mathbb{R}_+^k \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ (或 $\boldsymbol{F}^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - \boldsymbol{F}^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) \notin \mathrm{int}\mathbb{R}_+^k$), 则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是此多目标对策的帕雷托–纳什 (Pareto-Nash) 平衡点 (或弱帕雷托–纳什平衡点), 其中 $\mathbb{R}_+^k = \{(u_1, \cdots, u_k) \in \mathbb{R}^k | u_1 \geqslant 0, \cdots, u_k \geqslant 0\}$, $\mathrm{int}\mathbb{R}_+^k = \{(u_1, \cdots, u_k) \in \mathbb{R}^k | u_1 > 0, \cdots, u_k > 0\}$。

令 $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{w}^1, \cdots, \boldsymbol{w}^n)$, 其中对任意 $i \in N, \boldsymbol{w}^i \in \mathbb{R}_+^k \backslash \{\boldsymbol{0}\}$

(或 $\boldsymbol{w}^i \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+^k$), 则内积 $\langle \boldsymbol{w}^i, \boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x})\rangle$ 就是加权后第 i 个局中人的支付函数。

如果存在 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^n X_i$, 使对任意 $i \in N$, 有

$$\langle \boldsymbol{w}^i, \boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)\rangle = \max_{\boldsymbol{y}_i \in X_i} \langle \boldsymbol{w}^i, \boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)\rangle$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是此多目标对策的权帕雷托–纳什平衡点 (或权弱帕雷托–纳什平衡点)。

可以证明，如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是此多目标对策的权帕雷托–纳什平衡点 (或权弱帕雷托–纳什平衡点), 则它必是此多目标对策的弱帕雷托–纳什平衡点 (或帕雷托–纳什平衡点)。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

广义多目标对策 [generalized multiobjective game]　设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 是局中人的集合,X_i 是第 i 个局中人的策略集, $G_i : X_{\hat{i}} \to 2^{X_i}$ 是第 i 个局中人的可行策略映射, $\boldsymbol{F}^i = \{f_1^i, \cdots, f_k^i\} : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}^k$ 是第 i 个局中人的向量值支付函数。

如果存在 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^n X_i$, 使对任意 $i \in N$, 有 $x_i^* \in G_i(x_{\hat{i}}^*)$, 且对任意 $y_i \in G_i(x_{\hat{i}}^*)$, 有

$$\boldsymbol{F}^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - \boldsymbol{F}^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) \notin \mathrm{int}\mathbb{R}_+^k,$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是此广义多目标对策的弱帕雷托–纳什平衡点。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

n 人合作对策 [n-person cooperative game]　在n 人非合作对策中，任意两个或两个以上的局中人之间是不允许事先商定把他们的策略组合起来的，也不允许对他们得到的支付进行重新分配。在 n 人合作对策中，任意两个或两个以上的局中人之间可以事先商定把他们的策略组合起来，并在对策结束之后对他们得到的支付总和进行重新分配。

因此, 若干个局中人需要彼此合作，这就是联盟(coalition)。

设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 是局中人的集合,$v(S)$ 是定义在 N 的所有子集上, 是联盟 S 上的实值函数, 它表示联盟 S 通过协调其成员的策略所能保证得到的最大支付, 并满足条件:

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(N) \geqslant \sum_{i=1}^n v(\{i\}),$$

则称 $\Gamma = (N, v)$ 为 n 人合作对策,$v(S)$ 为对策的特征函数。

如果对任意 $S, T \subset N, S \bigcap T = \varnothing$, 有

$$v(S \bigcup T) \geqslant v(S) + v(T),$$

则称对策 Γ 具有超可加性。

如果对任意 $S, T \subset N, S \bigcap T = \varnothing$, 有

$$v(S \bigcup T) = v(S) + v(T),$$

则称对策 Γ 具有可加性。

如果 n 人合作对策具有可加性, 则称为非实质性的对策(inessential game), 否则称为实质性的对策(essential game)。

如果对 N 的每个子集 S, 都有

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N),$$

则称 Γ 是常和对策(constant-sum game)。

如果对任意 $S, T \subset N$, 都有

$$v(S) + v(T) \leqslant v(S \bigcup T) + v(S \bigcap T),$$

则称 Γ 是凸对策(convex game)。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

核心 [core]　n 人合作对策中的每个局中人应当从联盟的收入中分得自己的份额, 用一个 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 来表示, 其中 x_i 是第 i 个局中人的份额。$\boldsymbol{x}$ 应满足以下两个条件:

$$x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N)。$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 称为转归(imputation)，也称为分配。$x_i \geqslant v(\{i\})$ 表明对第 i 个局中人来说, 如果分配给他的 x_i 还达不到他一个人单干所能得到的支付, 他是不会接受这样的分配的。$\sum_{i=1}^n x_i > v(N)$ 当然不可能实现, 但是如果 $\sum_{i=1}^n x_i < v(N)$, 每个局中人也都不会接受, 因为他们还期望从 $v(N) - \sum_{i=1}^n x_i$ 中再得到一些支付。

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 是 n 人合作对策的两个转归, $S \subset N$, $S \neq \varnothing$。如果

$$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i,$$

且 $y_i > x_i$，对任意 $i \in S$，则称 $\boldsymbol{y}$ 关于 S 优超于 $\boldsymbol{x}$，记为 $\boldsymbol{y} \succ_S \boldsymbol{x}$。

$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i$ 表明分配 $\boldsymbol{y}$ 可行, 而对任意 $i \in S$ 有 $y_i > x_i$ 表明联盟 S 中的每个成员都将选择 $\boldsymbol{y}$ 而不选择 $\boldsymbol{x}$。

如果存在 $S \subset N$, $S \neq \varnothing$, 使 $\boldsymbol{y} \succ_S \boldsymbol{x}$, 则称转归 $\boldsymbol{y}$ 优超转归 $\boldsymbol{x}$, 记为 $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$。

如果转归 $\boldsymbol{x}$ 不被其他任何转归优超, 所有这样的转归 $\boldsymbol{x}$ 称为 n 人合作对策的核心, 这样的分配可以被每个局中人所接受, 因为找不到可行的比它更好的分配方案, 但是有许多合作对策的核心是空集。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

稳定集 [stable set]　对于 n 人合作对策, 冯・诺依曼 (von Neumann) 和莫根施特恩 (O. Morgenstern) 提出了一种解的概念, 称为稳定集或者冯・诺依曼–莫根施特恩解。

稳定集 V 由一些转归构成, 其中的任何两个转归不存在优超关系, 而 V 以外的任何一个转归都被 V 中的某个转归所优超。这第一个条件称为 V 的内部稳定性, 第二个条件称为 V 的外部稳定性。

对于 n 人合作对策, 如果其核心 $C \neq \varnothing$, 则稳定集 $V \neq \varnothing$, 且有 $C \subset V$。即使是这样, 仍然有一些合作对策的稳定集是空集, 即冯·诺依曼–莫根施特恩解不存在。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

沙普利值 **[Shapley's value]**　按照每个局中人对联盟的贡献来分配支付的一组数值。

沙普利 (L. S. Shapley) 证明，对于一个 n 人合作对策, 从 3 条公理出发, 可以确定一组值, 分配给全体局中人, 这组值称为沙普利值:

$$\boldsymbol{\Phi}(v) = (\Phi_1(v), \cdots, \Phi_n(v)),$$

其中

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus i)],$$

$i = 1, \cdots, n$, $|S|$ 表示子集 $S \subset N$ 中元素的个数。

沙普利值是合作对策中最重要的概念, 在许多实际问题中有广泛的应用。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

进化对策 **[evolutionary game]**　进化对策论中有两个主要概念：进化稳定策略和复制动态。

考虑对称*双矩阵对策*：Ⅰ和Ⅱ的纯策略相同, 不妨记为 $\{1, \cdots, k\}$, 当Ⅰ选择纯策略 i, Ⅱ选择纯策略 j, Ⅰ得到的支付与他选择纯策略 j, Ⅱ选择纯策略 i 时Ⅱ得到的支付相同。两个局中人的混合策略集都为 $\Delta = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k) | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k, \sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \right\}$。

当Ⅰ选择混合策略 $\boldsymbol{x} \in \Delta$, Ⅱ选择混合策略 $\boldsymbol{y} \in \Delta$, Ⅰ得到的支付是 $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是Ⅰ的支付矩阵, 而Ⅱ得到的支付是 $u'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$。

$\boldsymbol{x} \in \Delta$ 称为进化稳定策略(evolutionary stable strategy, ESS), 如果对任意 $\boldsymbol{y} \in \Delta$, 存在 $\varepsilon_y \in (0,1)$, 使对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$, 有

$$u(\boldsymbol{x}, \varepsilon \boldsymbol{y} + (1-\varepsilon)\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{y}, \varepsilon \boldsymbol{y} + (1-\varepsilon)\boldsymbol{x}) 。$$

在生物进化论中, 支付函数 u 通常以后代的数量来表示。在一个种群中, 主导策略 $\boldsymbol{x} \in \Delta$ 称为进化稳定策略, 如果对任意变异策略 $\boldsymbol{y} \in \Delta$, 当很少个体采用这个变异策略时,$\boldsymbol{x} \in \Delta$ 总优于 $\boldsymbol{y} \in \Delta$。

令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \Delta, e^i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$(第 i 个坐标为 $1, \cdots), i = 1, \cdots, k$。除 ESS 外, 进化对策论的另一个基本概念是复制动态(replicator dynamics)。复制动态由以下微分方程组给出：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = [u(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})]x_i, \quad i = 1, \cdots, k。$$

设 $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$ 为初始状态 $\boldsymbol{x}^0$ 时以上微分方程组的解, 可以证明：如果 $\boldsymbol{x}^0$ 是 Δ 的内点, 且当 $t \to \infty$ 时 $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) \to \boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{x}$ 必是此对策的*纳什平衡点*。

目前对策论最活跃的应用领域之一是生物学，过去无法说明的许多形式的生物之间的合作和竞争，进化对策论往往能够提供富有说服力的解释。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

焦点平衡 **[focal point equilibrium]**　由 2005 年诺贝尔经济学奖获得者谢林 (T. C. Schelling) 提出, 指局中人可能会应用在构造对策模型中抽象掉的某些信息达到的一种平衡点, 而这些信息往往与社会文化习俗以及局中人以往对策的历史和经历等有关。

(执笔: 俞建　校阅: 修乃华)

贝叶斯对策 **[Bayes game]**　由 1994 年诺贝尔经济学奖获得者豪尔绍尼 (J. C. Harsanyi) 提出, 设局中人的集合为 $N = \{1, \cdots, n\}$。对任意 $i \in N$，第 i 个局中人的策略集是 A_i，类型空间是 T_i(一般是有限集)，支付函数是 $u_i : A \times T \to \mathbb{R}$，其中 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$。对任意 $i \in N$，记 $\hat{i} = N \backslash i$。

$P : T \to [0,1]$ 是所有类型组合 $t = (t_1, \cdots, t_n) \in T$ 的概率分布，它是所有局中人的共同知识。对任意 $i \in N$，第 i 个局中人知道自己的真实类型 t_i，而不知道其他 $n-1$ 个局中人的真实类型，信息是不完全的，由贝叶斯公式确定的条件概率

$$P_i(t_{\hat{i}}/t_i) = \frac{P(t_i, t_{\hat{i}})}{\sum_{t_{\hat{i}} \in T_{\hat{i}}} P(t_i, t_{\hat{i}})}$$

为他对其他 $n-1$ 个局中人类型的信念，则

$$\sum_{t_{\hat{i}} \in T_{\hat{i}}} P_i(t_{\hat{i}}/t_i) u_i(a_i(t_i), a_{\hat{i}}(t_{\hat{i}}), t_i, t_{\hat{i}})$$

是他的期望支付函数，其中 $a_i(t_i)$，$a_{\hat{i}}(t_{\hat{i}})$ 分别是第 i 个局中人和其他 $n-1$ 个局中人选择的策略。

如果存在 $(a_1^*(t_1), \cdots, a_n^*(t_n)) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$，使对任意 $i \in N$，有

$$\begin{aligned} &\sum_{t_{\hat{i}} \in T_{\hat{i}}} P_i(t_{\hat{i}}/t_i) u_i(a_i^*(t_i), a_{\hat{i}}^*(t_{\hat{i}}), t_i, t_{\hat{i}}) \\ &= \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{\hat{i}} \in T_{\hat{i}}} P_i(t_{\hat{i}}/t_i) u_i(a_i, a_{\hat{i}}^*(t_{\hat{i}}), t_i, t_{\hat{i}}), \end{aligned}$$

则称 $(a_1^*(t_1), \cdots, a_n^*(t_n))$ 是此贝叶斯对策的平衡点。

贝叶斯对策是信息经济学的基础，在保险、投标、拍卖、机制设计等方面都有重要的应用。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

扩展型对策 [game in extensive form]　亦称展开型对策，是非合作对策问题的一种描述方式，主要由以下几个要素组成：

(1) 局中人，即对策的参与人。

(2) 局中人的行动顺序，确定了每个局中人在什么时间行动。

(3) 局中人在行动时所面临的问题，包括可供他选择的行动方案以及他所掌握的信息。

(4) 局中人的支付函数，当对策结束后每个局中人所获得的收益，当然它是所有局中人行动的函数。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

古诺对策 [Cournot game]　古诺竞争模型由古诺在 1838 年提出。

两家企业生产并销售同质的产品，以 q_1 和 q_2 分别表示企业 1 和企业 2 的产量，a 表示市场上对产品的总需求量，企业进行的是产量竞争，单位成本都是 c，价格 p 是产量的函数，假设 $p=a-(q_1+q_2)$。

企业 1 和企业 2 的利润 u_1 和 u_2 分别为：

$$u_1(q_1,q_2)=q_1(a-q_1-q_2)-cq_1,$$

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(a-q_1-q_2)-cq_2。$$

企业 1 和企业 2 都希望自己的利润最大，由 $\dfrac{\partial u_1}{\partial q_1}=0$ 和 $\dfrac{\partial u_2}{\partial q_2}=0$ 得到 $q_1^*=q_2^*=\dfrac{1}{3}(a-c)$，企业的利润 $u_1(q_1^*,q_2^*)=u_2(q_1^*,q_2^*)=\dfrac{1}{9}(a-c)^2$。

古诺的模型具有对策论中的平衡思想，因此一些文献中也将纳什平衡称为古诺–纳什平衡。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

完美平衡 [perfect equilibrium]　由 1994 年诺贝尔经济学奖获得者泽尔腾 (R. Selten) 在 1975 年提出, 以下用两人非合作有限对策来说明：设局中人Ⅰ和局中人Ⅱ都不是完全理性的，而是有限理性 (bounded rationality) 的，即可能犯错误，在他们作出决策时可能会发生某种“颤抖”。令 $\varepsilon>0$ 充分小，而 $X(\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)|x_i\geqslant\varepsilon, i=1,\cdots,m,\sum\limits_{i=1}^m x_i=1\}$ 和 $Y(\varepsilon)=\{\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)|y_j\geqslant\varepsilon, j=1,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^n y_j=1\}$ 分别是扰动对策中Ⅰ和Ⅱ的策略集。扰动对策必存在纳什平衡点$(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{y}(\varepsilon))$。如果 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是当 $\varepsilon_k\to 0$ 时 $(\boldsymbol{x}(\varepsilon_k),\boldsymbol{y}(\varepsilon_k))$ 的一个极限点，即 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是当Ⅰ和Ⅱ犯错误的概率逐渐减少，“颤抖”逐渐消失时被扰动对策平衡点的极限点，则称 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是原对策的一个完美平衡点 (perfect equilibrium)。用此种方法，泽尔腾删除了一些不稳定的平衡点, 使太多了的纳什平衡点得到了一种精练 (refinement)。

在泽尔腾之后，考虑到各种形式的颤抖和扰动，又有恰当平衡点 (proper equilibrium)，序贯平衡点 (sequence equilibrium) 和持久平衡点 (persistent equilibrium) 等精练概念。而在泽尔腾之前，中国数学家吴文俊等在 1962 年就提出本质平衡点 (essential equilibrium) 的概念。

1986 年，为了更加深入地研究纳什平衡点的稳定性，科尔伯格 (E. Kohlberg) 和默滕斯 (J. F. Mertens) 提出了这样的问题：一个理想中稳定的纳什平衡点应该具备哪些必要的性质？这是公理化的方法，他们希望用这种方法对平衡点进行精练。通过细致的论证，他们得出结论：一般还不能把它精练成单点集，它只能是集值的，满足这些性质的是纳什平衡点集的本质连通区 (essential component)。他们应用代数几何的方法证明了：任何 n 人非合作有限对策，其纳什平衡点集的连通区必为有限个，且至少有一个是本质的。后来，他们的工作又被其他一些学者改进和推广。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

重复博弈 [repeated game]　指一个多阶段对策, 而在对策的每个阶段, 都重复同样的对策。根据阶段对策被重复的次数, 可以将重复对策分成有限重复对策和无限重复对策。

有限重复对策是指给定阶段对策 $\varGamma$, $\varGamma$ 重复进行 T 次, 在每次阶段对策开始前, 对策的历史对所有局中人都是共同知识, 而每个局中人的总收益为他 T 次阶段收益的和。

无限重复对策是指给定阶段对策 $\varGamma$, $\varGamma$ 重复进行无限次, 在每次阶段对策开始前, 对策的历史对所有局中人都是共同知识, 而每个局中人的总收益为他无限次阶段收益的贴现。具体来说：设 $u_i(t)$ 表示第 i 个局中人在 t 阶段对策的收益, $0<\delta<1$ 是贴现率, 他的总收益为 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_i(t)$。

2005 年诺贝尔经济学奖获得者奥曼 (R. J. Aumann) 对重复对策有许多贡献, 而重复对策对社会科学产生了深远的影响。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

二人讨价还价问题 [two-person bargaining problem]　1950 年由纳什 (J. F. Nash) 提出并解决。

设有局中人Ⅰ和局中人Ⅱ, 供他们选择的结果集合为 S, Ⅰ和Ⅱ的效用函数分别是 $u_1:S\to\mathbb{R}$ 和 $u_2:S\to\mathbb{R}$, 问题是如何确定 $s\in S$, 使Ⅰ和Ⅱ都能够接受。

谈判破裂, 即无法达成协议, $d\in S$ 也是一个结果。在满足一些条件下, 纳什证明了此讨价还价问题的解 (后称纳什解) $s^*\in S$ 满足

$$(u_1(s^*)-u_1(d))(u_2(s^*)-u_2(d))$$
$$=\max_{s\in S}[(u_1(s)-u_1(d))(u_2(s)-u_2(d))]。$$

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

机制设计 [mechanism design]　人们在分析问题时, 通常将机制看作给定的, 机制设计理论则认为机制不必被看作是给定的, 而是未知的, 可设计的。设计者对于一个给定的目标设计一个机制, 即一个对策的规则, 使这个对策的参与者的个人利益与设计者既定的目标一致。

机制设计一般要涉及两个方面的问题：一个是信息成本问题, 即所制定的机制是否只需要较少的信息成本; 另一个是机制的激励问题, 即在制定的规则下, 每个参与者追求其个人利益, 其客观效果是否能正好达到设计者所要实现的目标。

2007 年诺贝尔经济学奖授予了 3 位在机制设计理论作出开创性贡献的学者, 在他们的工作中都成功地应用了对策论方法。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

拍卖 [auction]　目前比较流行的拍卖方式有以下四种：

(1) 英式拍卖。竞争的买主不断提高价格, 直到没人愿出更高的价格为止, 这是一种升值拍卖。

(2) 荷式拍卖。由拍卖人首先提出一个很高的价格, 然后他逐渐降低价格, 直到有人愿以报出的价格成交为止, 这是一种降价拍卖。

(3) 密封第一价格拍卖。竞争的买主向拍卖人递交密封的出价, 出价最高的买主将赢得交易, 付出他所出的价格。

(4) 密封第二价格拍卖。竞争的买主向拍卖人递交密封的出价, 出价最高的买主将赢得交易, 付出所有买主所出的第二高的价格。

拍卖已成为对策论研究的一个重要内容。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

微分对策 [differential game]　是在局中人进行活动时需要用微分方程 (组) 来描述的一种对策。

以两人零和微分对策为例来说明：

给定以下微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t),u(t),v(t))\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别是局中人 I 和局中人 II 的策略。当 I 选择策略 $u(t)$, II 选择策略 $v(t)$, II 对 I 的支付为:

$$J(u,v)=h(x(T))+\int_{t_0}^{T}g(t,x(t),u(t),v(t))\mathrm{d}t,$$

其中 h 和 g 都是标量值函数, I 希望 $J(u,v)$ 越大越好, II 希望 $J(u,v)$ 越小越好。

如果存在 I 的策略 $u^*(t)$ 和 II 的策略 $v^*(t)$, 使对 I 的任意策略 $u(t)$ 和 II 的任意策略 $v(t)$, 都有

$$J(u,v^*)\leqslant J(u^*,v^*)\leqslant J(u^*,v),$$

则称 $(u^*(t),v^*(t))$ 是此微分对策的一个解。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

虚设局中人 [dummy]　设 $\Gamma=(N,v)$ 是一个 n 人合作对策，$i\in N$, 如果对任何 $S\subset N, i\notin S$, 有 $v(S\bigcup\{i\})-v(S)=v(\{i\})$, 则称局中人 i 是虚拟局中人。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

贝特朗对策 [Bertrand game]　中文亦称伯川德对策。与古诺对策一样，是早期对策论的工作，其模型由贝特朗在 1883 年提出。与古诺对策不一样，两家企业进行的不是产量竞争，而是质量竞争。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

施塔克尔贝格均衡 [Stackelberg equilibrium]　考虑两人非合作对策，局中人 I 是领导者，策略集是 X, 局中人 II 是跟随者，策略集是 Y, I 的支付函数是 $f_1(x,y)$，II 的支付函数是 $f_2(x,y)$。

I 选择策略 $x\in X$，II 知道 I 选择 x 后，将从

$$G(x)=\{w\in Y|f_2(x,w)=\max_{u\in Y}f_2(x,u)\}$$

中选择 y, 而 I 当然知道 II 会作这样的选择，因此他将选择 $x^*\in X$, 使

$$\min_{y\in G(x^*)}f_1(x^*,y)=\max_{x\in X}\min_{y\in G(x)}f_1(x,y)。$$

(x^*,y^*) 称为此对策的斯坦科伯格均衡，其中 $y^*\in G(x^*)$，且 $f_1(x^*,y^*)=\min\limits_{y\in G(x^*)}f_1(x^*,y)$。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

相关均衡 [correlated equilibrium]　在纳什均衡的定义中，假定局中人是彼此独立地选择他们的策略的，如果他们在对策开始前进行讨论并决定建立一种信号，并根据这种共同的信号来各自选择策略，由此达到的均衡称为相关均衡。

(执笔：俞建　校阅：修乃华)

随机对策 [stochastic game]　随机对策的框架如下：

状态空间是一个可测空间 (Ω,A)。

对任意 $i\in N$, 第 i 个局中人的行动空间是可测空间 S^i, 记 $S=\prod\limits_{i=1}^{n}S^i$。

$P:\Omega\times S\to\Omega$ 是一个转移概率, 对任意 $a\in A, P(a/\omega,s)$ 表示今天的状态为 $\omega\in\Omega$，行动为 $s\in S$ 时明天的状态为 $a\in\Omega$ 的概率。

对任意 $i\in\mathbb{N}$, 第 i 个局中人的支付函数 $u_i=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\delta^t g_i(\omega_t,s_t)$，其中 $0<\delta<1$ 为折扣因子，$g_i:\Omega\times S\to\mathbb{R}$

是第 i 个局中人的阶段支付函数，ω_0 为初始状态，$s_t \in S$ 为阶段 t 时的行动，状态 ω_{t+1} 由转移概率和 ω_t, s_t 确定。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

序贯均衡 [**sequential equilibrium**]　考虑 n 人非合作有限对策的扩展型，用 X 表示决策结（即不是初始结和末端结）的集合，对任意的 $x \in X, h(x)$ 表示包含结 x 的信息集，$i(x)$ 或 $i(h)$ 表示在结 x 或信息集 h 上的行动的局中人 $i, \sigma_i(/x)$ 或 $\sigma_i(/h(x))$ 表示局中人 $i(x)$ 在结 x 的混合策略。Σ 是所有策略组合 $\sigma = (\sigma_1 \cdots \sigma_n)$ 的集合，对任意 $\sigma \in \Sigma, P^\sigma(x)$ 和 $P^\sigma(h(x))$ 分别表示对策进入结 x 或信息集 $h(x)$ 的概率，$\mu(x)$ 表示对策到达信息集 $h(x)$ 的情况下局中人 $i(x)$ 在 $h(x)$ 上的信念（即概率分布），$u_{i(h)}(\sigma/h, \mu(h))$ 表示局中人 $i(h)$ 在信息集 h 到达，其信念为 $\mu(h)$ 而策略为 σ 的情况下的期望支付。

设 Σ^0 为所有完全策略组合 $\sigma = (\sigma_1 \cdots \sigma_n)$ 的集合，即对任意 $\sigma \in \Sigma^0$, 所有 h 及局中人 $i(h)$ 在 h 的行动 a_i，有 $\sigma_i(a_i/h) > 0$，这样在结 x 应有 $P^\sigma(h(x)) > 0$, 而由贝叶斯法则，$\mu(x) = P^\sigma(x)/P^\sigma(h(x))$ 有定义。

如果 (σ, μ) 满足以下两个条件：

(1) (σ, μ) 是序贯理性的：对任意信息集 h 及所有可行策略 $\sigma'_{i(h)}$，有

$$u_{i(h)}(\sigma/h, \mu(h)) \geqslant u_{i(h)}((\sigma'_{i(h)}, \sigma_{\hat{i}(h)})/h, \mu(h));$$

(2) (σ, μ) 是一致的：存在序列 $\sigma^m \subset \Sigma^0$ 及由贝叶斯法则决定的序列 $\{\mu^m\}$，使 $(\sigma, \mu) = \lim\limits_{m\to\infty} (\sigma^m, \mu^m)$。

则称 (σ, μ) 是一个序贯均衡。

（执笔：俞建　校阅：修乃华）

17.8　排　队　论

排队论 [**queueing theory**]　研究排队现象的一门学科，是运筹学的一个分支。描述排队现象的数学模型称为排队系统。这种系统包括一个由需求“服务”的请求组成的输入流，以及一个提供这种服务的机构。

日常生活中，人们经常遇到各种各样的排队系统。如上下班坐公共汽车，乘客到达流就看作是需求“服务”的请求组成的输入流，而汽车为提供这种服务的机构。汽车与乘客就构成一个排队系统。还有许多场合，排队系统的构成没有那么明显。例如有很多旅客想打电话到火车站订购火车票，当其中一个旅客正在通电话时，其他旅客就不得不在各自的电话机旁等待。虽然车站售票处与这些旅客分散在城市的多个地方，但他们构成了一个排队系统。

在上述多种排队系统中，需求“服务”的请求的输入与提供服务的机构处理每个请求所用的时间都随不同的时机与条件而变化，因此排队系统的状况是随机的，即随多种时机与条件而波动。由于排队系统中这种随机性的特征，排队论主要以概率论与随机过程为其研究工具。对这些系统，为了强调其随机性，也称之为随机服务系统。

如果输入流中每一个需求“服务”的请求仅仅在单位时间的正整数倍时刻来到系统，而系统中提供这种服务的机构处理所到达的服务请求所用的时间也只可能是单位时间的正整数倍，具有这种性质的排队系统通常称为离散时间的排队系统。

（执笔：张汉勤　校阅：姚大卫）

顾客 [**customer**]　亦称服务对象，指排队系统的输入流中每一个需求“服务”的请求。顾客既可能是人，也可能是物，依排队系统所描述的实际排队现象而定。如在有自动机床的工厂里，因故障而停止运转的机器等待工人去修理。在此排队系统中，需求“服务”的请求，即顾客，是指待修的机器。在描述上下班人们乘公共汽车的排队系统中，顾客是指来乘车的人。

（执笔：张汉勤　校阅：姚大卫）

到达时刻 [**arrival epoch**]　顾客到达排队系统的时间点，它记录了排队系统的输入流中每一个需求“服务”的请求的到达时刻。到达时刻可以用非负随机变量序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 来描述。具体地，输入流中第一个进入系统的顾客的到达时刻为 u_1，第二个进入系统的顾客的到达时刻为 u_1+u_2，一般地，第 n 个进入系统的顾客的到达时刻为 $u_1+u_2+\cdots+u_n$。同时，到达时刻也可以用一个左极限存在、右连续的随机过程 $\{A(t)|t \geqslant 0\}$ 来刻画，其中 $A(t)$ 表示到时刻 t 为止进入系统的需求“服务”请求个数，且 $A(0-) = 0$。则到达时刻可表示为

$$u_1 = \inf\{t > 0, A(t+) > A(t-)\},$$

$$u_1 + \cdots + u_n = \inf\{t > u_1 + \cdots + u_{n-1},$$

$$A(t+) > A(t-)\}, \quad n = 2, 3, \cdots。$$

排队系统的输入流完全可由系统中顾客的到达时刻来刻画，或由一个左极限存在、右连续的随机过程 $\{A(t)|t \geqslant 0\}$ 来刻画，其中 $A(t)$ 表示到时刻 t 为止进入系统的顾客数。有时称 $\{A(t)|t \geqslant 0\}$ 为顾客到达过程。

（执笔：张汉勤　校阅：何启明）

到达时间间隔 [**interarrival time**]　排队系统中两个相邻到达顾客的到达时刻的间隔。设顾客到达时刻的间隔由非负随机变量序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 来给出。在排队系统的研究中，用到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 来描述输入流。常见的输入流有定长输入、泊松 (Poisson) 输入（最简单流输入）、爱尔朗 (Erlang) 输入、位相型输入和一般独立输入。

在定长输入流中，任意两个相邻到达的顾客的到达时间间隔都一样，且是一个正常数。

在泊松输入 (最简单流输入) 中，顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布非负随机变量序列且 u_1 遵从一参数为 λ 的负指数分布，这里 $\lambda > 0$，即

$$\Pr(u_1 \leqslant t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0。 \end{cases}$$

在爱尔朗 (Erlang) 输入中，顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布非负随机变量序列且 u_1 遵从 m 阶爱尔朗分布，即

$$\Pr(u_1 \leqslant t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0。 \end{cases}$$

在位相型输入中，顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布非负随机变量序列且 u_1 遵从位相型分布，即

$$\Pr(u_1 \leqslant t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \alpha \exp(Tt) e, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

u_1 可解释为一个状态空间为 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$，且状态 $m+1$ 为吸收态，而其他状态为瞬态的连续时间齐次马尔可夫链的吸收时间。

在一般独立输入中，顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布非负随机变量序列且 u_1 具有一般分布。上面所罗列的四种输入流均可看作是一般独立输入的特例。

类似地，对离散时间排队系统，常见的输入流有定长输入、几何输入、位相型输入和一般独立输入。

在定长的输入流中，顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是独立同分布随机变量序列且 u_1 依概率 1 取某个自然数。

几何输入是指顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列且

$$\Pr\{u_1 = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $0 < p < 1$。对几何输入的排队系统，在 $[0, n]$ 时间段内顾客到达个数这一随机变量服从二项分布，即有 k 个顾客到达的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，$k = 0, 1, \cdots, n$。

位相型输入是指顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列且 u_1 为离散型位相分布，即 u_1 是一个状态空间为 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$，状态 $m+1$ 为吸收态，其他 m 个状态为瞬态的离散时间齐次马尔可夫链的吸收时间。

一般独立输入是指顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个独立同分布取非负整数值的随机变量序列，且 u_1 有一个一般分布。上面所列的定长输入、几何输入及位相型输入均是一般独立输入的特例。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

损失制系统 [loss system]　亦称消失服务系统，指系统中没有供顾客等待服务的空间的排队系统，即顾客到达时，若系统中所有提供服务的机构均被占用 (正在服务已经到达系统的顾客)，该顾客就自动消失。如通常使用的损失制电话系统。具体地，考虑一个描述自动电话交换机的排队系统，输入流即为电话用户的呼唤，它是随机发生的。而服务机构是由固定数目的 k 条通道组成的。当某一时刻如果所有 k 条通道都被用户呼唤而占用，那么此时新到的呼唤就会损失掉。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

等待制系统 [waiting system]　亦称等待服务系统，指系统中具有供顾客等待服务的空间的排队系统。这样的等待空间可以容纳无穷多个顾客。进入系统而没有立即被接受服务的顾客在其等待空间内形成队列等待服务。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

混合制系统 [mixed system]　从顾客来到某随机排队系统是否进入系统接受服务的角度来看，混合制系统是介于损失制系统和等待制系统之间的一种排队系统。混合制系统可以分别从系统的三个不同的物理量来描述。

一是从等待空间有限的角度来描述，即系统中只能容纳有限个顾客等待服务。若顾客到达时发现系统的服务机构处在空闲或等待空间没有被占满，该顾客就立即被接受服务或进入系统的等待空间排队等待服务；系统中服务机构正在服务顾客且等待空间已被等待服务的顾客占满，该顾客就立刻离去。

二是从等待时间的角度来描述。系统中供顾客等待服务的空间为无限，但顾客在队列中的等待时间不能超过某一给定时间长度 T，等待时间超过 T 该顾客就离去。

三是从逗留时间的角度来描述。系统中供顾客等待服务的空间为无限，但顾客在队列中的等待时间加上自身的服务时间不能超过某给定时间长度 T，超过 T 该顾客就离去。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

服务规则 [service discipline]　当随机排队系统中服务机构一旦可接纳顾客进行服务，且系统中等待其服务的顾客数多于 1 个时，服务机构从等待服务的顾客中如何选取顾客进行服务的规则。常用的服务规则有先到先服务、后到先服务、随机服务、优先权服务、成批服务等。

先到先服务的服务规则是指服务机构一旦可接纳顾客进行服务，则从等待服务的顾客中挑选最先到达系统者进行服务。

后到先服务的服务规则是指服务机构一旦可接纳顾客进行服务，则从等待服务的顾客中挑选最后到达系统者进行服务。

随机服务的服务规则是指服务机构一旦可接纳顾客进行服务时，则从系统中此时等待服务的所有顾客中随机地选取进行服务，而不考虑他们到达系统的顺序。

优先权的服务规则是指系统对每一个来到系统接受服务

的顾客给予一个优先级，当服务机构一旦可接纳顾客进行服务时，则从等待服务的顾客中挑选优先级最高的进行服务。优先级相同的顾客之间一般采用先到先服务的服务规则。

优先权的服务规则本身还有两种。一种是强占型优先权服务规则，另一种是非强占型优先权服务规则。在强占型优先权服务规则中，若高优先级的顾客进入系统时发现服务机构正在服务一个比自己优先级低的顾客，那么服务机构就立刻转而为这个到达的高优先级顾客服务。而被停止服务的低优先级顾客就重新等待服务机构服务。而非强占型优先权服务规则是指任何一个优先级的顾客一旦被服务机构接受服务，那么他的服务就不会被打断。

分享式服务规则(processor sharing)，指任意时刻系统中所有的顾客都同时被系统的服务机构接受服务，而该服务机构将自己的服务能力均分到每一个被服务的顾客上。例如，对仅有一个服务机构的排队系统，在某个时间段 $[t,t+\Delta)$ $(\Delta>0)$ 内系统恰有 n 个顾客，那么在 $[t,t+\Delta)$ 时间段内每一个顾客均从服务机构处接受到了 Δ/n 长时间的服务。

队首分享式服务规则(head-of-the-line processor sharing)，对一个排队系统假设有 K 种不同类别的顾客，顾客到达系统之后以其类别按到达顺序排成队列等待服务。而在任一时刻，系统中每一类别最先到达系统的顾客都同时被系统的服务机构接受服务，而该系统将自己的服务能力均分到每一个被服务的顾客上。

传递式服务规则(round robin)，固定一个小时间长度 $\Delta>0$，传递式服务规则为所有顾客轮回服务，而每一次服务顾客接受到的服务时间是 Δ。若某一顾客所需服务时间为 v，则该顾客要被服务机构进行 $\lceil v/\Delta\rceil$ 次服务之后才离开系统。

(执笔：张汉勤　校阅：赵修利)

服务台 [server]　排队系统中用来处理输入流中到达顾客的服务需求的机构。它既可以是人，也可能是某种设备。一个系统中的服务机构既可以是一个，也可能是多个。如超级市场这个排队系统，顾客是来此购买东西的人，而服务台就是收银员；又如机场构成的排队系统，准备起降的飞机就是系统中的顾客，而跑道就是其服务台。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

服务时间 [service time]　服务台用来完成处理顾客的服务需求所需的时间长度，服务时间往往是随机的。

用 v_i 表示服务台服务第 i 个顾客所用的时间，在排队论研究中，通常假定顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有如下几种分布：

定长分布：每一顾客的服务时间都是一个正常数 c。

负指数分布：顾客的服务时间相互独立，具有相同的负指数分布，即

$$\Pr(v_1\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\mu x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\mu>0$ 为一常数。

爱尔朗 (Erlang) 分布：顾客的服务时间相互独立，具有相同的 m 阶爱尔朗分布，即

$$\Pr(v_1\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\mathrm{e}^{-\mu x}\dfrac{(\mu x)^i}{i!}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\mu>0$ 为一常数。

超指数分布：顾客的服务时间相互独立，具有相同的 m 阶超指数分布，即

$$\Pr(v_1\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\mathrm{e}^{-\mu_i x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\mu_i>0$ 及 $\alpha_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 均为常数且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=1$。

位相型分布：顾客的服务时间相互独立，具有相同的位相型分布，即

$$\Pr(v_1\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\beta\exp\{Sx\}e, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

v_1 可解释为一个状态空间为 $\{1,2,\cdots,m,m+1\}$，且状态 $m+1$ 为吸收态，而其他状态为瞬态的连续时间齐次马尔可夫链的吸收时间。

一般服务分布：顾客的服务时间相互独立，且具有相同的分布，即顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布随机变量序列，而且 v_1 具有一般分布。当然前面罗列的五种类型服务时间分布均是一般服务分布的特例。

对于离散时间的排队系统，顾客的服务时间通常是一个只取非负整数的随机变量。常见的分布有定长分布，即顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列且 $\Pr(v_1=m)=1$，其中 m 为某自然数；几何分布，即顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列且 $\Pr(v_1=k)=p^{k-1}(1-p)$，$k=1,2,\cdots$，其中 $0<p<1$；位相型分布，即顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列，v_1 为状态空间为 $\{1,2,\cdots,m,m+1\}$，且 $(m+1)$ 为吸收态，而其他状态为瞬态的离散时间齐次马尔可夫链的吸收时间。还有一般服务分布，即顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布随机变量序列且 v_1 为取值为非负整数、具有一般分布的随机变量。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

单服务台系统 [single-server system] 指仅有一个服务台的排队系统。常见的单服务台系统有 $M/M/1$，$M/G/1$，$G/M/1$ 和 $G/G/1$ 系统。

$M/M/1$ 单服务台系统是一个服务规则为先到先服务的等待制系统，顾客的输入流为一泊松 (Poisson) 输入，其参数通常记为 λ，而顾客的服务时间相互独立且遵从具有相同参数的负指数分布，其参数通常记为 μ。

$M/G/1$ 为一个先到先服务的等待制系统，顾客的输入流是参数为 λ 的泊松过程，顾客的服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布随机变量序列。

$G/M/1$ 是一个先到先服务的等待制系统，顾客的输入流是一般独立输入，而顾客的服务时间相互独立且遵从具有相同参数 μ 的负指数分布。

$G/G/1$ 是先到先服务的等待制系统，顾客的输入流是一般独立输入，顾客的服务时间序列是一般的独立同分布随机变量序列。所有以上四种单服务台系统均假定顾客到达时间间隔序列与顾客服务时间序列相互独立。

（执笔：张汉勤　校阅：何启明）

多服务台系统 [multi-server system] 指服务台多于一个的排队系统。常见的多服务台系统有 $M/M/k$ 和 $G/M/k$。

$M/M/k$ 是指具有 k 个服务台，以先到先服务为服务规则的等待制系统，顾客输入流是参数为 λ 的泊松 (Poisson) 过程，顾客的服务时间相互独立、遵从相同的负指数分布且不依赖于顾客在哪一个服务台接受服务。且假定顾客到达时间间隔序列与顾客服务时间序列相互独立。

$G/M/k$ 是指具有 k 个服务台先到先服务的等待制系统，顾客输入流为一般的独立输入，顾客的服务时间相互独立、遵从相同的负指数分布且不依赖于顾客在哪一个服务台接受服务。且假定顾客到达时间间隔序列与顾客服务时间序列相互独立。

（执笔：张汉勤　校阅：何启明）

队长 [queue length] 是一个以时间为指标集，状态空间为非负整数集的随机过程，通常记为 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$。对于任意时刻 t，$Q(t)$ 代表此时刻系统中的顾客数，即排队等待服务的顾客数加上服务台正在服务的顾客数。当系统服务多类顾客时，从系统分析角度来讲，有必要将这些类之间的顾客加以区分，这时所说的队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 就是一个多维随机过程，每一维代表一类顾客数。

队长过程在时刻 t 的取值 $Q(t)$ 不仅依赖于初始时刻系统顾客数 $Q(0)$、$(0,t]$ 内顾客的到达及 $(0,t]$ 内被接受服务的顾客所需的服务时间，也依赖于服务规则。例如先到先服务的 $G/G/1$ 系统，记顾客的到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$A(t)=\begin{cases}0, & u_1>t,\\ \sup\{n\mid u_1+\cdots+u_n\leqslant t\}, & u_1\leqslant t;\end{cases}$$

$$S(t)=\begin{cases}0, & v_1>t,\\ \sup\{n\mid v_1+\cdots+v_n\leqslant t\}, & v_1\leqslant t。\end{cases}$$

让 $I(t)$ 表示服务台在 $[0,t]$ 内处于空闲的时间积累，即

$$I(t)=t-\int_0^t I_{\{Q(s)>0\}}\mathrm{d}s,$$

其中 $I_{\{Q(s)>0\}}$ 为事件 $\{Q(s)>0\}$ 的示性函数，即

$$I_{\{Q(s)>0\}}=\begin{cases}1, & Q(s)>0,\\ 0, & Q(s)=0,\end{cases}$$

则

$$Q(t)=Q(0)+A(t)+S(t-I(t)),\quad t\geqslant 0。$$

在等待空间为有限 (记为 M) 的排队系统中，假设系统中有 k 个服务台，则队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 是一个取值在 $\{0,1,\cdots,M+k\}$ 上的随机过程。

在排队论研究中，通常假定队长过程是一个左极限存在、右连续的过程，跳跃点就是顾客到达时刻或离去时刻。

（执笔：张汉勤　校阅：陈宏）

闲期 [idle period] 对给定一个排队系统中的任一服务台，该服务台的闲期是指从其变成空闲时刻开始到其开始下一个服务为止的这段时间，显然闲期依赖于系统的顾客到达时间间隔及顾客所用的服务时间。对于 $M/M/1$ 系统，设顾客到达时间间隔的负指数分布的参数为 λ，顾客的服务时间的负指数分布参数为 μ，由负指数分布的无记忆性知任意一个闲期的长度均遵从参数为 λ 的负指数分布。

对给定任意时刻 t，在 $[0,t]$ 内系统可能无闲期，也可能有若干个闲期。对 $G/G/1$ 系统，记顾客的到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$。假定初始时刻系统中的顾客数为零，则系统的第一个闲期为从时刻 0 开始且长度为 u_1，第二个闲期开始的时刻为 $u_1+v_1+\cdots+v_N$，其中

$$N=\min\{n\mid u_2+\cdots+u_{n+1}-(v_1+\cdots+v_n)>0\},$$

闲期长度为 $(u_2+\cdots+u_N+u_{N+1})-(v_1+\cdots+v_N)$。按此方法可以定义系统的第 n 个闲期及其长度。

在分析服务设施利用的有效性时，有时需要引进 $[0,t]$ 内服务台闲期的积累。它是一个以时间为指标集，状态空间为非负实数的随机过程，通常记为 $\{I(t)|t\geqslant 0\}$。对于具有单服务台的排队系统，记队长过程为 $Q(t)$，则有 $I(t)=\int_0^t I_{\{Q(s)=0\}}\mathrm{d}s$，这里 $I_{\{Q(s)=0\}}$ 是事件 $\{Q(s)=0\}$ 的示性函数，即

$$I_{\{Q(s)=0\}}=\begin{cases}1, & Q(s)=0,\\ 0, & Q(s)\neq 0。\end{cases}$$

当然 $\{I(t)|t \geqslant 0\}$ 为一个非降过程。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

忙期 [busy period]　对给定一个排队系统中的任一服务台，该服务台的忙期是指从其经过某个闲期之后首次接受顾客进行服务开始，一直到其再次变成空闲时为止的这段时间。我们知道系统的服务台所处的忙期和闲期状态是交替出现的。忙期也是依赖于系统的顾客到达时间间隔及顾客所用的服务时间。对 $G/G/1$ 排队系统，记顾客的到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$。假定初始时刻系统中的顾客数为零，则系统中第一个忙期开始的时刻为 u_1，忙期长度为 $v_1+\cdots+v_N$，其中

$$N=\min\{n \mid (u_2+\cdots+u_{n+1})-(v_1+\cdots+v_n)>0\}。$$

按此方法可定义系统的第 n 个忙期。如用 $B(t)$ 表示 $[0,t]$ 内系统的忙期积累，则有

$$B(t)=t-I(t)=\int_0^t I_{\{Q(s)>0\}}\mathrm{d}s。$$

$\{B(t)|t \geqslant 0\}$ 为一非降过程。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

等待时间 [waiting time]　顾客的等待时间是指从该顾客到达时刻起到该顾客开始接受服务时为止的这段时间。等待时间是每个顾客最为关心的指标之一。

某一顾客的等待时间依赖于先于它到达的其他顾客的到达时间间隔和其服务时间，当然也依赖于服务规则。对于 $G/G/1$ 排队系统，假定顾客到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，初始时刻系统中的顾客数为 0。在先到先服务规则下，第一个到达顾客的等待时间 W_1 为 0，第 n 个到达顾客的等待时间为

$$W_n=\max\{W_{n-1}+v_{n-1}-u_n,\ \ 0\},\quad n=2,3,\cdots.$$

上述是从某一个到达系统的顾客的角度来叙述等待时间的，同样可以从任一时刻来叙述等待时间。对某一时刻 t，等待时间是指如果时刻 t 处有一个顾客到达，该顾客的等待时间为时刻 t 始的等待时间，通常用 $W(t)$ 表示，有时亦称虚等待时间(virtual waiting time)。知 $\{W(t)|t \geqslant 0\}$ 是一个左极限存在、右连续的过程，跳跃点就是顾客的到达时刻。对如上描述的 $G/G/1$ 系统，有

$$W(u_1+\cdots+u_n)=W_n,\qquad n=1,2,\cdots。$$

记 $W(t,x)=\Pr(W(t)\leqslant x)$。对 $M/M/1$ 和 $G/M/1$ 系统，若顾客服务时间的负指数分布的参数为 μ，用 $Q(t)$ 表示 t 时刻系统的队长，利用负指数分布的无记忆性知，

$$W(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}(x)\Pr(Q(t)=i),\quad x\geqslant 0,$$

其中 $E^{(i)}(x)$ 为参数 μ 的 i 阶爱尔朗分布，即

$$E^{(i)}(x)=\begin{cases}1, & i=0,\\ \displaystyle\int_0^x \mu^i\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t, & i=1,2,\cdots。\end{cases}$$

对 $M/G/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔的负指数分布的参数为 λ，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，且

$$\Pr(v_1\leqslant x)=H(x)。$$

注意到当 $\varepsilon\to 0$，有

$$\begin{aligned}W(t+\varepsilon,x)=&(1-\lambda\varepsilon)W(t,x+\varepsilon)\\&+\lambda\varepsilon\int_0^{x+\varepsilon}H(x+\varepsilon-y)\mathrm{d}_yW(t,y)+o(\varepsilon)。\end{aligned}$$

则 $W(t,x)$ 满足如下积分微分方程

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial W(t,x)}{\partial x}-\lambda W(t,x)+\lambda\int_0^x H(x-y)\mathrm{d}_yW(t,y)。$$

此方程在排队论中叫塔卡奇 (Takács) 积分微分方程。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

逗留时间 [sojourn time]　一个顾客在系统中的逗留时间是指该顾客从进入系统的时刻起到该顾客接受完服务离开系统为止的这段时间。显然，一个顾客的逗留时间是其自身的服务时间加上其等待时间。所以，一个顾客的逗留时间依赖于服务规则、顾客的到达时间间隔及顾客的服务时间。

对于 $G/G/1$ 排队系统，若顾客到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，初始时刻系统中顾客数为 0。在先到先服务规则下，第一个顾客的逗留时间 W_1^{s} 为 v_1，一般地，第 n 个到达顾客的逗留时间为

$$W_n^{\mathrm{s}}=v_n+\max\{\ W_{n-1}^{\mathrm{s}}-u_n,\ \ 0\ \},\quad n=2,3,\cdots。$$

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

离去过程 [departure process]　一个以时间为指标集、状态空间为非负整数集的随机过程，通常用 $\{D(t)|t\geqslant 0\}$ 表示。离去过程在时刻 t 取值 $D(t)$ 代表在 $[0,t]$ 时间内被服务台完成服务之后离开系统的顾客数，因此它依赖于服务规则、$[0,t]$ 时间内被接受服务的顾客所用的服务时间、初始时刻系统的顾客数及 $(0,t]$ 时间内顾客到达的时间间隔。$\{D(t)|t\geqslant 0\}$ 为一个左极限存在、右连续的单调增过程，跳跃点恰为顾客离开系统的时刻。对于先到先服务 $G/G/1$ 系统，令 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为顾客的到达时间间隔序列，$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为顾客的服务时间序列，定义

$$S(t)=\begin{cases}0, & v_1>t,\\ \sup\{n\mid v_1+\cdots+v_n\leqslant t\} & v_1\leqslant t。\end{cases}$$

由闲期过程 $\{I(t)|t \geqslant 0\}$ 的定义，知服务台在 $[0,t]$ 内工作时间的积累为 $t-I(t)$。由此在 $[0,t]$ 时间之内服务完的顾客数 $D(t)$ 就等于 $S(t-I(t))$。

(执笔：张汉勤 校阅：陈宏)

负荷过程 [workload process] 一个以时间为指标集、状态空间为非负实数集的随机过程，通常记为 $\{V(t)|t \geqslant 0\}$。$V(t)$ 代表系统在时刻 t 的剩余工作量，即假设在时刻 t 之后，如果我们不允许有顾客从系统外部到达，那么系统还需多长时间才能变成空闲。负荷过程在时刻 t 的取值依赖于 $[0,t]$ 时间内顾客的到达时间间隔及此时间段内来到顾客所用的服务时间。对 $G/G/1$ 系统，若假定顾客的到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义

$$A(t)=\begin{cases}0, & u_1>t,\\ \sup\{n \mid u_1+\cdots+u_n \leqslant t\}, & u_1 \leqslant t。\end{cases}$$

在初始时刻系统中顾客数为零的条件下，在 $[0,t]$ 时间内系统外部到达的顾客给服务台带来的总工作量为 $\sum\limits_{i=1}^{A(t)} v_i$(若 $A(t)=0$，约定 $\sum\limits_{i=1}^{A(t)} v_i=0$)。由闲期过程 $\{I(t)|t \geqslant 0\}$ 的定义知，在 $[0,t]$ 时间内服务台的工作时间积累为 $t-I(t)$。由此有

$$V(t)=\sum_{i=1}^{A(t)} v_i-(t-I(t))。$$

我们知道，若 $t \neq u_1+\cdots+u_n$，则时刻 t 的负荷过程对应的值就是时刻 t 顾客的等待时间；若 $t=u_1+\cdots+u_n$，则 $V(t)=W_n+v_n$。

(执笔：张汉勤 校阅：陈宏)

成批到达 [batch arrival; bulk arrival] 亦称大量到达，指每次顾客的到达可能不是仅有一个顾客，而是一批顾客，且每批到达顾客的数目为一随机变量。也就是说，多个顾客可能同时到达排队系统。若用 u_n 表示第 $(n-1)$ 批与第 n 批顾客到达的时间间隔，且第 n 批到达的顾客数目记为 b_n，则成批到达过程完全可由 $\{u_n,b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 来描述。记

$$A(t)=\begin{cases}0, & u_1>t,\\ \sup\{n \mid u_1+\cdots+u_n \leqslant t\}, & u_1 \leqslant t,\end{cases}$$

则 $(0,t]$ 时间内到达的顾客数为 $\sum\limits_{i=1}^{A(t)} b_i$。

当 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布且服从参数为 λ 的负指数分布时，知 $\{A(t)|t \geqslant 0\}$ 为泊松 (Poisson) 过程，而此时的成批到达过程 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{A(t)} b_i : t \geqslant 0\right\}$ 恰巧是一个复合泊松过程。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

成批服务 [bulk service] 指服务台接受顾客服务时，不是仅仅接受一个顾客进行服务，而是可以接受一批同时进行服务。常见的有两种成批服务方式，一种为具有柔性的成批服务，另一种是非柔性的成批服务。对具有柔性的成批服务排队系统，当空闲服务台可接受顾客服务时，如果等待服务的顾客数超过或等于 b(b 为取值为自然数的常数)，服务台同时可接受 b 个等待的顾客进行服务，且同时结束服务；若等待服务的顾客数小于 b，那么服务台同时对所有等待顾客进行服务，且同时结束服务。对非柔性的成批服务，空闲的服务台当且仅当等待服务的顾客数不小于 b 时才开始服务，每次同时只服务 b 个顾客，且同时结束服务。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

瞬时性态 [transient behavior] 对一给定的排队系统，它的瞬时性态是指描述这个系统的一些数量指标 (如队长、等待时间等) 的随机过程在任何时间点处的取值，有时亦称非平衡理论。瞬时性态研究的着眼点就是来分析这样的随机过程在有限时间点处取值的概率分布。我们仅以 $M/M/1$ 系统为例来说明。

对 $M/M/1$ 系统，假定顾客到达的时间间隔和服务时间分别遵从参数为 λ 和 μ 的负指数分布。用 $Q(t)$ 来表示时刻 t 的队长，若初始时刻系统中有 i 个顾客，记其概率分布为

$$p_n(t)=\Pr(Q(t)=n)。$$

则有：

$$\begin{aligned}p_n(t)=&\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n-i}{2}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\{\, I_{n-i}(2+\sqrt{\lambda\mu})\\ &+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} I_{n+i+1}(2+\sqrt{\lambda\mu})\\ &+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{j+1}{2}} I_{n+i+j+1}(2+\sqrt{\lambda\mu})\,\},\end{aligned}$$

其中

$$I_n(y)=I_{-n}(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{y}{2}\right)^{n+2j}}{j!(n+j)!},\quad n \geqslant 0。$$

用 $W(t)$ 表示时刻 t 到达顾客所需的等待时间，则按全概率公式及负指数分布无记忆性有

$$\begin{aligned}\Pr(W(t)>x)&=\sum_{j=1}^{\infty}\Pr(Q(t)=j)\Pr(W(t)>x \mid Q(t)=j)\\ &=\sum_{j=1}^{\infty} p_j(t)\sum_{i=1}^{j-1}\mathrm{e}^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!},\end{aligned}$$

其中 $p_j(t)$ 由上式给出。

(执笔：张汉勤 校阅：赵修利)

平稳性态 [stationary behavior] 对一给定的排队系统，其平稳性态是指对描述这个系统的一些数量指标 (如队

长、等待时间) 的随机过程在时间趋于无穷时的极限分布。平稳性态分析有时亦称统计平衡理论或遍历理论。

如对 $M/M/1$ 系统，若顾客到达时间间隔和服务时间的负指数分布参数分别为 λ,μ，系统的队长过程和等待时间过程分别记为 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 及 $\{W(t)|t\geqslant 0\}$。若 $\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，则有

$$\lim_{t\to\infty}\Pr(Q(t)=n)=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

及

$$\lim_{t\to\infty}\Pr(W(t)>x)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)x},\quad x\geqslant 0。$$

对 $M/G/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔的负指数分布的参数为 λ，而顾客的服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遵从的分布为 $H(x)$，即

$$\Pr(v_1\leqslant x)=H(x)。$$

$H(x)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为 $H^*(s)$。记 $1/\mu=Ev_1$，让 W_n 表示第 n 个到达顾客的等待时间，则若 $\lambda/\mu<1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\Pr(W_n\leqslant x)=W(x),$$

其中 $W(x)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为

$$W^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda H^*(s)}$$

对给定某一个描述系统的随机过程，它的平稳性态分析既可以考虑时间连续变化趋于无穷时过程的极限分布，又可以考虑时间取某些具有一定物理意义的点列，该随机过程所对应的随机变量序列的极限分布。如上面等待时间过程 $\{W(t)|t\geqslant 0\}$ 在顾客到达的点列处得到的序列 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$。

(执笔：张汉勤　校阅：赵修利)

嵌入马尔可夫链 [imbedded Markov chain]　对一些排队系统，我们感兴趣的一些数量指标所对应的随机过程不是一个马尔可夫过程，如 $M/G/1$ 及 $G/M/k$ 系统，它们的队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 就不是马尔可夫过程。但过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 有如下的性质：存在一个时间点列，当考察该过程在这些时间点列处的取值时即得到一个离散时间的马尔可夫链，这样构成的马尔可夫链即称为该过程的一个嵌入马尔可夫链。从而，可以用马尔可夫过程理论来研究嵌入马尔可夫链，并由此得到原过程的相关结果。

对 $M/G/1$ 系统，若顾客到达时间间隔的负指数分布的参数为 λ，而顾客的服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遵从的分布函数为 $H(x)$，即 $\Pr(v_1\leqslant x)=H(x)$。用 D_n 表示第 n 个服务完的顾客离开系统的时刻。记

$$Q_n=Q(D_n+)。$$

则 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}\alpha_0&\alpha_1&\alpha_2&\cdots\\ \alpha_0&\alpha_1&\alpha_2&\cdots\\ 0&\alpha_0&\alpha_1&\cdots\\ &\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_k=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}H(t),\ k=0,1,2,\cdots$。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

补充变量法 [supplementary variable method]　对一些排队系统，描述系统的一些重要数量指标所对应的随机过程本身不是一个马尔可夫过程。但通过分析造成其不是马尔可夫过程的原因，找到相关的因素，在原过程的基础上补充上描述这些因素的过程之后 (有时变成了状态空间为二维或三维的随机过程)，所得到的新过程就变成了一个马尔可夫过程。从而可用马尔可夫过程理论来研究新过程，并得到原过程的相关结果。这种构造马尔可夫过程的方法称为补充变量法。

对 $M/G/1$ 系统，由于时刻 t 正在被服务的顾客 (当 $Q(t)\neq 0$ 时) 的剩余服务时间一般不再具有无记忆性，知队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 不是一个马尔可夫过程。为此引进一个新的随机过程 $\{R(t)|t\geqslant 0\}$，

$$R(t)=\begin{cases}0, & Q(t)=0,\\ t\text{时刻正在被服务的顾} & \\ \text{客已被服务的时间} & Q(t)\neq 0,\end{cases}$$

则 $\{(Q(t),R(t))|t\geqslant 0\}$ 是一个马尔可夫过程，其状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}\times[0,\infty)$，从而可用马尔可夫过程理论来研究 $\{(Q(t),R(t))|t\geqslant 0\}$。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

矩阵几何方法 [matrix-geometric method]　对于 $M/G/1$ 系统和 $G/M/1$ 系统，其队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 不是一个连续时间的马尔可夫过程，而补充变量法告诉我们可以通过将过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 补充新的变量来得到一个连续时间的马尔可夫过程，但其状态空间往往不再可数。事实上，状态空间的可数性为研究马尔可夫链带来不少方便。对于 $M/G/1$ 和 $G/M/1$ 系统，使其队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 不是马尔可夫过程的原因是顾客的服务时间或到达时间间隔不具有无记忆性。基于这点，人们对 $M/G/1$ 系统中的服务时间分布或 $G/M/1$ 系统中的顾客到达时间间隔分布作近似。作近似后的排队系统，用来对 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 补充的变量只需要有限个状态，从而保证使用补充变量法之后得到的马尔可夫过程的状态空间的可数性。矩阵几何法就是基于这种近似方法而提出来的。对于一个具有有限状态 $\{1,2,\cdots,m,m+1\}$、连续时间

马尔可夫链 $\{X(t)|t \geqslant 0\}$，状态 $(m+1)$ 为吸收态，而其他状态均为瞬态，无穷小生成元为

$$\begin{pmatrix} T & T\boldsymbol{e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{e}$ 为以 1 为元素的 m 维列向量，初始分布为

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})。$$

设 ξ 表示该马尔可夫过程的吸收时间，即

$$\xi = \inf\{t \geqslant 0 \mid X(t) = m+1\},$$

则

$$\Pr(\xi \leqslant x) = 1 - \alpha \exp\{Tx\}\boldsymbol{e}, \quad x \geqslant 0,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$。将 ξ 称为 PH 分布或位相型分布 (phase-type distribution)，其中状态 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$ 亦称 PH 分布的位相。所有 PH 分布全体记为 $\mathfrak{PH}$。我们知道 $\mathfrak{PH}$ 在弱收敛拓扑下是在定义在 $[0, \infty)$ 上的全体概率分布组成的空间中稠密。这说明对给定任何一个定义在 $[0, \infty)$ 上的概率分布函数，我们都可以构造一个 PH 分布使之很好地近似这个给定的概率分布函数。对 $G/M/1$ 系统，若顾客到达时间间隔的分布是一个如上描述的 PH 分布，用 $\Phi(t)$ 表示时刻 t 用来刻画该时刻所处的顾客到达时间间隔的相应 PH 分布所在的位相，则 $\{(Q(t), \Phi(t))|t \geqslant 0\}$ 是一个状态空间为 $\{(0,1), \cdots, (0,m), (1,1), \cdots, (1,m), \cdots\}$ 的连续时间马尔可夫过程，而其无穷小生成元可写为如下这种形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

其中所有元素均为一个 $m \times m$ 矩阵。因为此生成元的特殊结构，可容易求得 $\{Q(t)|t \geqslant 0\}$ 的平稳分布，其平稳分布可以用一些 $m \times m$ 矩阵的幂形式给出，即有矩阵几何解。

（执笔：张汉勤　校阅：何启明）

流体逼近 **[fluid approximation]**　流体逼近是关于排队系统中描述一些重要数量指标的随机过程在某种形式下的极限。粗略地讲，是将其随机过程对时间和状态作同样尺度的变换，然后令这个尺度变得越来越大，相应过程在某种意义下的极限。具体地，对描述排队系统某个指标的随机过程 $\{X(t)|t \geqslant 0\}$。假定其几乎所有的样本轨道均属于 $D[0, \infty)$(定义在 $[0, \infty)$ 上左极限存在、右连续的函数全体)。将时间和状态空间同时作尺度长度为 $N(N$ 大于零$)$ 的变换，即 $\dfrac{X(Nt)}{N}$。我们知对任何正数 N，随机过程 $\left\{\dfrac{X(Nt)}{N}|t \geqslant 0\right\}$ 几乎所有的样本轨道均属于 $D[0, \infty)$。若有一个几乎所有的样本轨道均在 $D[0, \infty)$ 上的随机过程 $\{\overline{X}(t)|t \geqslant 0\}$ 使得在斯科罗霍德 (Skorohod) J_1 拓扑下，关于 N 的序列 $\left\{\dfrac{X(Nt)}{N}|t \geqslant 0\right\}$ 几乎处处收敛于 $\{\overline{X}(t)|t \geqslant 0\}$， 则 $\{\overline{X}(t)|t \geqslant 0\}$ 就叫过程 $\{X(t)|t \geqslant 0\}$ 的流体逼近。在排队论研究中，通常考虑一列排队系统，对某一数量指标在第 N 个排队系统 $(N = 1, 2, \cdots)$ 中所相应的随机过程记为 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant 0\}$。对过程 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant 0\}$ 就作尺度为 N 的变换，即 $\dfrac{X^{(N)}(Nt)}{N}$。考虑在斯科罗霍德 J_1 拓扑下序列 $\left\{\dfrac{X^{(N)}(Nt)}{N}|t \geqslant 0\right\}$ 几乎处处收敛的极限，若存在，其极限就叫 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant 0\}$ 的流体逼近。

通常流体逼近对应的是泛函型大数定律，它有时被用于排队系统的大偏差分析。

（执笔：张汉勤　校阅：戴建岗）

扩散逼近 **[diffusion approximation]**　扩散逼近是关于排队系统中描述一些重要数量指标的随机过程在某种形式下的极限，有时亦称重话务极限定理 (heavy traffic limit theorem)。粗略地讲，它是将随机过程对时间和状态按一定比例作尺度变换，然后令这种尺度越来越大，相应过程在某种意义下的极限。具体地，对描述排队系统某个数量指标的随机过程 $\{X(t) : t \geqslant 0\}$，假定其几乎所有的样本轨道均属于 $D[0, \infty)$ (定义在 $[0, \infty)$ 上左极限存在、右连续的函数全体)。将时间作尺度 N 的变换，将状态作 $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 尺度的变换，其中 N 为正数，即 $\dfrac{X(Nt)}{\sqrt{N}}$，知过程 $\left\{\dfrac{X(Nt)}{\sqrt{N}}|t \geqslant 0\right\}$几乎所有的样本轨道均属于 $D[0, \infty)$。若存在一个几乎所有样本轨道均在 $D[0, \infty)$ 中的随机过程 $\{\widehat{X}(t) : t \geqslant 0\}$使得在斯特罗霍德 (Skorohod) J_1 拓扑下，$\left\{\dfrac{X(Nt)}{\sqrt{N}}|t \geqslant 0\right\}$ 依分布收敛到 $\{\widehat{X}(t)|t \geqslant 0\}$，则称 $\{\widehat{X}(t)|t \geqslant 0\}$ 为过程 $\{X(t)|t \geqslant 0\}$ 的扩散逼近。

与流体逼近相似，通常考虑一列排队系统，对某一数量指标在第 N 个排队系统 $(N = 1, 2, \cdots)$ 中所对应的描述该数量指标的随机过程记为 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant 0\}$。对过程 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant 0\}$ 将时间按 N 尺度作变换，将状态按 $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 作变换，即 $\dfrac{X^{(N)}(Nt)}{\sqrt{N}}$。考虑在斯特罗霍德 J_1 拓扑下，序列 $\left\{\dfrac{X^{(N)}(Nt)}{\sqrt{N}}|t \geqslant 0\right\}$ 弱收敛的极限， 若存在, 其极限就称为 $\{X^{(N)}(t)|t \geqslant$

0} 的扩散逼近。

通常扩散逼近对应的是泛函中心极限定理。

(执笔: 张汉勤　校阅: 戴建岗)

强逼近 [strong approximation]　排队系统的强逼近理论是从统计与随机过程的强逼近理论中发展出来的。由随机过程的强逼近理论知对给定一列独立同分布随机变量序列 $\{X_n|n\geqslant 1\}$，记

$$EX_1=a,\quad E(X_1-a)^2=\sigma^2。$$

若存在一个 $\delta>0$ 使得 $E|X_1|^{2+\delta}<\infty$，则在一个新的概率空间中重新定义 $\{X_n|n\geqslant 1\}$(即和原来的序列有相同的任意有限维分布)，在其上有一个布朗运动 $\{\xi(t)|t\geqslant 0\}$ 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\sum_{i=1}^{\lceil t\rceil}(X_i-a)-\sigma\xi(t)|=_{a.s.}o(T^{1/(2+\delta)})。$$

如对于初始时刻系统中没有顾客的 $G/G/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及顾客服务时间序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足对某 $\delta>0$，

$$Eu_1^{2+\delta}<\infty,\quad Ev_1^{2+\delta}<\infty,$$

其队长过程记为 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$，记

$$\lambda^{-1}=Eu_1,\quad \mu^{-1}=Ev_1,$$

$$\sigma_A^2=E\left(u_1-\frac{1}{\lambda}\right)^2,\quad \sigma_S^2=E\left(v_1-\frac{1}{\mu}\right)^2,$$

则能找到一个新的概率空间，使在此上重新构造一个新的队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$(即和原队长过程有相同的任意有限维分布)，且在此上有一个布朗运动 $\xi(t)$ 使得当 $\lambda>\mu$ 时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Q(t)-(\lambda-\mu)t-\sigma\xi(t)|=_{\text{a.s.}}o(T^{1/(2+\delta)});$$

当 $\lambda=\mu$ 时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Q(t)-\sigma(\xi(t)-\inf_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s))|=_{\text{a.s.}}o(T^{1/(2+\delta)}),$$

其中 $\sigma^2=\lambda^3\sigma_A^2+\mu^3\sigma_S^2$。

(执笔: 张汉勤　校阅: 陈宏)

流体模型 [fluid model]　由于一些排队系统过于复杂，为便于研究，人们有时不得不简化原排队系统模型，而流体模型就是在这种背景下提出来的。粗略地讲，它是由如下方法得到的: 将系统的顾客到达过程和服务完的顾客离去过程作流体逼近，将描述原系统的一些关系中关于顾客的到达过程和服务完的顾客离去过程的量用其相应流体逼近代替之后得到的就称为流体模型。

如对 $G/G/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，记

$$\lambda^{-1}=Eu_1,\quad \mu^{-1}=Ev_1。$$

在先到先服务规则下，队长过程 $Q(t)$ 有关系

$$\begin{cases}Q(t)=Q(0)+A(t)-S(t-I(t)), & t\geqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^{\infty}Q(t)\mathrm{d}I(t)=0,\end{cases}$$

其中，$I(t)$ 非降,

$$A(t)=\begin{cases}0, & u_1>t,\\ \sup\{n\mid u_1+\cdots+u_n\leqslant t\}, & u_1\leqslant t;\end{cases}$$

$$S(t)=\begin{cases}0, & v_1>t,\\ \sup\{n\mid v_1+\cdots+v_n\leqslant t\}, & v_1\leqslant t;\end{cases}$$

$\{I(t)|t\geqslant 0\}$为闲期过程。

由于 $A(t)$ 的流体逼近为 λt，$S(t)$ 的流体逼近为 μt，由此其流体模型为

$$\begin{cases}\overline{Q}(t)=\overline{Q}(0)+(\lambda-\mu)t+\mu\overline{I}(t), & t\geqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\overline{Q}(t)\mathrm{d}\overline{I}(t)=0,\end{cases}$$

$I(t)$ 非降。由于流体逼近对应的是大数定律，流体逼近往往都是关于时间 t 的确定性函数，由此流体模型往往也是一个确定性的模型。而描述模型指标的关系往往转化成一个动态互补问题，有时也称斯科罗霍德 (Skorohod) 问题。

基于如上流体模型的思想，人们将它进一步一般化提出了应用广泛的流体排队模型。直观地讲，顾客的到达不仅仅只在可数多的离散点上，而是像流体按一定速度连续到达，同样服务台服务它们也像一个流体，按一定的速度连续服务，且顾客的流入速度及服务速度依赖于该系统所处的环境，而该环境可以被一个连续时间、状态空间为 $\{1,2,\cdots\}$ 的马尔可夫链 $\{X(t)|t\geqslant 0\}$ 所描述。具体地，对定义在状态空间 $\{1,2,\cdots\}$ 的两个非负函数 $\lambda(i)$ 及 $\mu(i)$，$i\in\{1,2,\cdots\}$，函数 $\lambda(X(t))$ 代表顾客在时刻 t 的流入速度，$\mu(X(t))$ 代表服务台在时刻 t 服务顾客的速度。让 $Q(t)$ 表示时刻 t 系统的顾客数，则有

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\lambda(X(t))-\mu(X(t)), & Q(t)>0,\\ (\lambda(X(t))-\mu(X(t)))^+, & Q(t)=0,\end{cases}$$

即

$$Q(t)=\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\left(Y(t),\ \int_u^t[\lambda(X(s))-\mu(X(s))]\mathrm{d}s\right),\quad t\geqslant 0,$$

其中

$$Y(t)=Q(0)+\int_0^t[\lambda(X(s))-\mu(X(s))]\mathrm{d}s,\quad t\geqslant 0。$$

这是一个最简单的马尔可夫型流体排队模型。

(执笔：张汉勤 校阅：戴建岗)

布朗模型 **[Brownian model]** 布朗模型与流体模型类似，是人们为简化一些复杂排队系统而提出的一种模型。粗略地讲，它是由如下方法得到的：将系统的顾客到达过程和服务完的顾客离去过程作扩散逼近，将描述原系统的一些关系中关于顾客的到达过程和服务完的顾客离去过程的量用其扩散逼近代替之后得到的就称为布朗模型。

如对 $G/G/1$ 系统，顾客的到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，记

$$\lambda^{-1}=Eu_1,\quad \mu^{-1}=Ev_1,$$

$$\sigma_A^2=E\left(u_1-\frac{1}{\lambda}\right)^2,\quad \sigma_S^2=E\left(v_1-\frac{1}{\mu}\right)^2。$$

其布朗模型由如下关系给出

$$\begin{cases}\widehat{Q}(t)=\widehat{Q}(0)+(\sigma_A^2\lambda^3+\sigma_S^2\mu^3)^{1/2}\xi(t)\\ \qquad\qquad +(\lambda-\mu)t+\mu\widehat{I}(t),\quad t\geqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\widehat{Q}(t)\mathrm{d}\widehat{I}(t)=0。\end{cases}$$

其中，$\widehat{I}(t)$ 非降，$\xi(t)$ 为标准一维布朗运动。扩散逼近通常可认为是流体逼近的加细，所以布朗模型也可认为是流体模型的加细。由于扩散逼近往往是由布朗运动给出，因此通常一个布朗模型是由布朗运动来描述，而描述模型指标的关系往往可用一个半鞅反射布朗运动来描述。

(执笔：张汉勤 校阅：戴建岗)

排队网络 **[queueing network]** 一个排队网络由若干个节点组成，其中每一个节点代表一类服务设施，由一个或多个服务台构成。每一节点处均可有从网络外部到达的顾客来接受其服务，而顾客在某个节点处接受完服务之后以一定的概率立刻离开系统或立刻转移到网络其他节点处继续接受服务，当然也允许以一个正的概率立刻返回到该节点。

若系统中至少有一个节点处有从网络外部到达的顾客，而且从网络外部到达的顾客在网络中的节点之间经过若干步来回转移接受服务之后以概率 1 最终离开系统，具有该性质的排队网络称为开排队网络。若系统中没有一个节点具有从外部来到的顾客，而系统初始时刻仅有有限个顾客分布在不同的节点处接受或等待接受相应的服务台服务，他们在网络中的节点之间来回转移接受服务且以概率 1 不离开系统，具有这种性质的排队网络称为闭排队网络。

如果系统中每一个节点处接受服务的顾客所用的服务时间仅仅依赖于所在的节点，而不依赖于该顾客是从外部到达还是从其他节点处转移而来，和服务完成的顾客以什么样的概率立刻进行转移，也仅仅依赖于所在的节点，与其他无关，这样的网络称为具有单类顾客的随机排队网络。

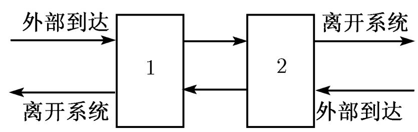
对于一个具有单类顾客、J 个节点的排队网络，若仅有一个节点处具有外部到达的顾客而且顾客从该节点处接受完服务以概率 1 转移到第二个节点处接受服务，以此类推，一般地从第 $j(j<J)$ 个节点处接受完服务的顾客以概率 1 转移到第 $(j+1)$ 个节点处接受服务，最后在第 J 个节点处接受完服务的顾客以概率 1 离开系统，这样的开排队网络称为串联排队系统。

对具有单类顾客的排队网络，用 $\{u_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示第 j 个节点处从系统外部到达顾客的时间间隔序列。用 $\{v_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示第 j 个节点接受第 n 个顾客所用的服务时间。用独立同分布随机变量序列 $\{\varphi_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示第 j 个节点服务完顾客的转移。它的取值为 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_J,\boldsymbol{0}\}$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个坐标为 1 其他为零的 J 维单位向量。即若 $\varphi_n^{(j)}=\boldsymbol{e}_i$，表明第 j 个节点服务完的第 n 个顾客立刻转移到了第 i 个节点；若 $\varphi_n^{(j)}=0$，表示第 j 个节点服务完的第 n 个顾客立刻离开了系统。在每一节点处给定一个服务规则的条件下，一个具有单类顾客的排队网络完全由 $\{(u_n^{(j)},v_n^{(j)},\varphi_n^{(j)})\}_{n=1}^{\infty}$ 及系统的初始状态来决定。

令 $p_{ij}=\Pr(\varphi_1^{(i)}=j)$，$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{J\times J}$ 称为顾客的转移矩阵，它是次随机的。一个具有单类顾客的开排队网络就是指顾客的转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的谱半径小于 1。一个具有单类顾客的闭排队网络就是顾客的转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一行之和均为 1。对于一个如上描述的串联排队网络，其转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\&&&\ddots&\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}。$$

不具有单类顾客的排队网络的性质的排队网络称为具有多类顾客的随机排队网络。如系统仅有两个节点，每一个节点均有从外部到达的顾客。从外部到达第一个节点的顾客服务完成之后以概率 1 转移到第二个节点接受服务，一旦服务完就立刻离开系统。而从外部到达第二个节点的顾客服务完成之后以概率 1 转移到第一个节点服务，一旦服务完成就立刻离开系统。同时第一个节点服务从外部到达的顾客所用的时间和服务从第二个节点转移来的顾客所用的时间可能具有不同的分布。同样第二个节点服务直接从外部到达的顾客所用的服务时间和服务从第一个节点转移来的顾客所用的时间也可能有不同的分布。这是一个简单的多类顾客到达的排队网络，可用下图直观地表述。



对具有多类顾客的排队网络，假定有 J 个节点，K 类顾客。用 $\{u_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示第 k 类顾客从系统外部到达的时间间隔序列。$\{v_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示第 k 类顾客所需的服务时间序列。独立同分布随机变量序列 $\{\varphi_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 描述第 k 类顾客服务完成之后的转移情况。它取值在 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_K,\boldsymbol{0}\}$，其中 $\boldsymbol{e}_k$ 表示第 k 个坐标为 1、其他为零的 K 维向量。若 $\varphi_n^{(k)}=\boldsymbol{e}_i$，则表示第 k 类顾客中第 n 个服务完成的顾客转到第 i 类顾客。用 $c(j)$ 表示第 j 个节点所服务的顾客所在类的集合。由此 $c(1),\cdots,c(J)$ 是顾客所有类组成的集合 $\{1,\cdots,K\}$ 的剖分，且每个非空。定义矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{jk})_{J\times K}$，其中

$$c_{jk}=\begin{cases}1, & k\in c(j),\\ 0, & k\notin c(j)。\end{cases}$$

令 $p_{ij}=\Pr(\varphi_1^{(i)}=j)$，$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{K\times K}$。一个具有多类顾客的排队网络在给定一个服务规则下，完全由系统初始状态，$\{(u_n^{(k)},v_n^{(k)},\varphi_n^{(k)})\}_{n=1}^{\infty}$ 及矩阵 $\boldsymbol{C}$ 来决定。

对如上的开排队网络，若将外部到达第一个节点的顾客称为第一类顾客，它们被服务完之后转到第二个节点的称为第二类顾客，从外部到达第二个节点的顾客称为第三类顾客，它们被服务完之后转到第一个节点的称为第四类顾客。知

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

具有单类顾客的排队网络可看作是具有多类顾客的排队网络的特例，即 $J=K$ 时，具有多类顾客的排队网络就退化成具有单类顾客的排队网络。

（执笔：张汉勤　校阅：姚大卫）

杰克逊网 [Jackson network]　杰克逊网络有两种，一种是开杰克逊网，另一种是闭杰克逊网。开杰克逊网是指具有单类顾客的随机排队网络，而且网络中任一具有外部到达顾客的节点，在其上外部顾客到达过程是一个泊松 (Poisson) 过程，每一个节点上顾客所用的服务时间相互独立，且均具有负指数分布，而且每一个节点处顾客服务完之后的转移也是相互独立且有相同分布的。进一步，不同节点处顾客从系统外部到达、所用的服务时间、服务完的转移也是相互独立的。即我们若用 $\{(u_n^{(i)},v_n^{(i)},\varphi_n^{(i)})\}_{n=1}^{\infty},i=1,\cdots,J$，来描述这个具有单类顾客的排队网络，对每一个 i，$\{u_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{v_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布且具有负指数分布的随机变量序列，$\{\varphi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布随机变量序列，而且 $\{u_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$、$\{v_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\varphi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,\cdots,J)$ 是 $3J$ 个互相独立的序列。

对具有 J 个节点的闭杰克逊网，即具有单类顾客、J 个节点的闭随机排队网络，类似于开杰克逊网，网中不同节点处服务顾客所用的时间服从负指数分布且相互独立，服务完的顾客的转移也是相互独立的。

（执笔：张汉勤　校阅：姚大卫）

循环排队 [cyclic queue]　一类特殊的闭杰克逊网络。具体地，它是一个闭的具有 J 个节点的排队网络，而且第一个节点服务完的顾客以概率 1 转移到第二个节点去接受服务，在其服务完后，又以概率 1 转移到第三个节点，按此顺序，在第 J 个节点服务完的顾客以概率 1 转移到第一个节点接受服务，即系统中的顾客均按此顺序在系统中循环，在每一个节点上轮回接受服务。

（执笔：张汉勤　校阅：姚大卫）

休假排队 [vacation queue]　休假排队系统是对排队系统中的服务台接受顾客进行服务这种能力的一种修正。具体地讲，通常服务台假定是可靠的，即任何时候它都可用于接纳顾客进行服务，而休假排队系统是指服务台由于某种原因变得不可靠，即有些时候不能接纳顾客进行服务，将服务台不能用来接纳顾客进行服务的这些时间段看作服务台在休假或在修复。导致服务台休假的原因有很多种，如对服务设施进行维护保养、能量补充或为提高服务设施利用率，在相对轻闲时被指派从事其他服务等。

服务台的休假规则也有很多种，如空歇服务机制下的休假模型，这类休假模型是服务台一旦开始服务顾客，就一直要持续工作到系统变成空的。休假只能在系统空闲无顾客时开始，而休假的长度往往是一个随机变量。还有多重休假及单重休假。多重休假是指一旦系统内无顾客，服务台就立刻开始一次随机长度 (记为 V) 的休假。结束一次休假时，若系统中仍无等待服务的顾客，就继续另一个随机长度且与 V 独立同分布的休假。这样休假重复下去直到某次休假结束时系统中已有等待服务的顾客，服务台就结束其休假开始服务顾客直到服务台再次变成空闲时又重新开始休假。单重休假排队模型是指每当系统变成空时服务台就立刻开始一个随机长度为 V 的休假。当休假结束时，若系统中已有顾客等待服务，服务台就立刻开始服务等待的顾客。若系统中无顾客等待，服务台就进入通常的闲期状态，直到新的顾客到时开始一个忙期。

（执笔：张汉勤　校阅：赵以强）

重试排队 [retrial queue]　重试排队系统是指一个排队系统按某种规则设定之后，系统外部到达的顾客按此规则可能被系统接纳，也可能被系统拒绝，但被系统拒绝的外部到达顾客并不消失，而是进到系统外部的一个辅助设施中等待。在辅助设施中等待的每个顾客均按某种规律重新试图加入到系统中。如考虑一个具有 k 个服务台，有可容纳 M 个顾客的等待空间的系统。若外部到达的顾客发现有的服务台空闲，则立刻被某个空闲的服务台接纳进行服务。若发现 k 个服务

台均处在忙期，但 M 个可容纳顾客等待的空间未被占满，则按其到达顺序占据一个等待位置排队等待服务。若发现 k 个服务台均处在忙期，且 M 个可容纳顾客等待的空间均已被占满，则它就进入到系统外一个辅助设施中去，经过长度为一个非负随机变量 Y 的时间之后，它再来到系统。若系统有空闲的服务台或 M 个可容纳顾客等待的位置未被占满，则它重试成功，被系统接纳。否则，该顾客继续回到辅助设施中，经过长度与 Y 独立同分布的时间之后再来到系统看能否被接收。这样重复下去直到该顾客被系统接收为止。

(执笔：张汉勤　校阅：何启明)

话务方程 [traffic equation]　是为研究顾客到达的平均速度而提出来的。对于一个仅仅有从外部到达的顾客的系统，如顾客到达时间间隔为独立同分布随机变量序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，那么其平均到达速度就是其到达时间间隔的数学期望的倒数。如果系统中既有从外部到达的顾客，又有排队网络内部转移来的顾客，情况就会复杂。

对于一个排队网络，如果它是一个具有多类顾客的排队系统，那么每一类顾客的到达均有可能有两部分，一部分是从网络系统外部到达，一部分是自网络系统内部其他类顾客服务完之后转移而来。对一个具有单类顾客的排队网络，来到每一节点处服务的顾客也可能有两部分，一部分是从网络外部到达的顾客，一部分是从其他节点处服务完的顾客转移而来。

对于具有单类顾客、系统有 J 个节点的排队网络，每个节点的外部顾客到达时间间隔由 $\{u_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，顾客服务时间由 $\{v_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，服务完的顾客的转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{J\times J}$。记

$$\alpha_j=\frac{1}{Eu_1^{(j)}},\qquad \mu_j=\frac{1}{Ev_1^{(j)}}。$$

令 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)$ 为如下方程的解

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_J)+((\lambda_1\wedge\mu_1),\cdots,(\lambda_J\wedge\mu_J))\boldsymbol{P}。$$

按顾客转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的物理意义，λ_j 可看作是第 j 个节点处顾客的平均到达速度，而上述方程就称为具有单类顾客的开排队网络的话务方程。

对于有 K 类顾客，J 个节点的开排队网络 $(J\leqslant K)$，第 k 类顾客的外部到达时间间隔序列为独立同分布随机变量序列 $\{u_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$，其服务时间序列由独立同分布随机变量序列 $\{v_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，服务完的顾客转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{K\times K}$，记

$$\alpha_k=\frac{1}{Eu_1^{(k)}},\qquad \mu_k=\frac{1}{Ev_1^{(k)}}。$$

若对每一个 $k\ \ (1\leqslant k\leqslant K)$，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_K)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}$ 的第 k 个坐标处的值不大于 μ_k，则话务方程为

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_K)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_K)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}。$$

按顾客转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的物理意义，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_j(\boldsymbol{P}^n)_{ji}$ 表明的是由 j 类顾客服务完之后转移生成 $i\ (i\neq j)$ 类顾客的平均速度，由此知 λ_j 是 j 类顾客到达的平均速度。

(执笔：张汉勤　校阅：陈宏)

话务强度 [traffic intensity]　指单位时间内服务顾客的时间，有时亦称服务强度。

如对 $M/M/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔遵从参数为 λ 的负指数分布，顾客服务时间遵从参数为 μ 的负指数分布，则其话务强度就定义为 $\dfrac{\lambda}{\mu}$。特别地，若 $\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，称系统为轻话务系统(light traffic)；若 $\dfrac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$，称系统为高负荷或重话务系统(heavy traffic)。

对于一个有单类顾客，J 个节点的排队网络，每个节点的外部顾客到达的时间间隔由 $\{u_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，顾客服务时间序列为 $\{v_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$，服务完的顾客的转移矩阵由 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{J\times J}$ 给出。记

$$\alpha_j=\frac{1}{Eu_1^{(j)}},\qquad \mu_j=\frac{1}{Ev_1^{(j)}}.$$

从 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_J)+((\lambda_1\wedge\mu_1),\cdots,(\lambda_J\wedge\mu_J))\boldsymbol{P}$，解出 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)$，则网络中第 j 个节点的话务强度定义为 $\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$。

对有 K 类顾客，J 个节点的开排队网络 $(K>J)$，第 k 类顾客的外部到达时间间隔由序列 $\{u_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，其服务时间序列由 $\{v_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 给出，服务完的顾客转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ik})_{K\times K}$。令 $c(j)$ 为在第 j 个服务台的所有类顾客全体。记

$$\alpha_k=\frac{1}{Eu_1^{(k)}},\qquad \mu_k=\frac{1}{Ev_1^{(k)}}。$$

由话务方程

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_K)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_K)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}$$

解出 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_K)$，则第 j 个服务台的话务强度定义为

$$\sum_{k\in c(j)}\frac{\lambda_k}{\mu_k}。$$

(执笔：张汉勤　校阅：陈宏)

瓶颈 [bottleneck]　用来描述一个排队网络中服务台前等待服务顾客的拥挤程度，它可由话务强度来决定。若某节点处的服务强度大于或等于 1，则称该节点是网络中一个瓶颈；若节点处服务强度严格小于 1，则称该节点为非瓶颈的(non-bottleneck)。对于瓶颈的节点，若其服务强度恰巧等于 1，则称为一个平衡瓶颈(balanced bottleneck)，若服务强度严格大于 1，则称为一个严格瓶颈(strict bottleneck)。由于服

务强度越大说明单位时间内节点内的服务台处在空闲的时间就越少，即顾客在该节点前所需的等待时间越长，这样对于一个排队网络，我们知道是瓶颈的节点前顾客的等待时间就相对长。换句话说，等待的顾客数就越多。若网络是一个开网，我们知道造成顾客还没有离开系统的主要原因是这些顾客在瓶颈的节点前等待的时间过长。从这点来看，也是为什么把这类节点叫“瓶颈”的一种直观解释。

(执笔：张汉勤　校阅：陈宏)

平衡方程 [balance equation]　在研究顾客的到达时间间隔和服务时间均遵从负指数分布的排队系统的队长过程的平稳性态时提出的一个概念。粗略地讲，平衡方程陈述的是过程进入一个状态的速度和它离开该状态的速度相等的条件。平衡方程有时也称为统计平衡状态方程(statistic-equilibrium state equation) 或流守恒方程(conservation equation of flow)。它反映的是一种统计平衡特性。而由平衡方程得到的解经过正则化之后就是对应的平稳分布。

如对 $M/M/1$ 系统，假定顾客到达时间间隔服从参数为 λ 的负指数分布，顾客的服务时间遵从参数为 μ 的负指数分布。用 $Q(t)$ 表示时刻 t 队长，知 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程。记 $p_i(t)=\Pr(Q(t)=i), i=0,1,\cdots$。若 $\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，知当 t 趋于无穷时 $p_i(t)$ 极限存在，记为 p_i，则

$$\begin{cases}(\lambda+\mu)p_i=\lambda p_{i-1}+\mu p_{i+1}, & i=1,2,\cdots,\\ \lambda p_0=\mu p_1。\end{cases}$$

它就称为 $M/M/1$ 系统的平衡方程。

(执笔：张汉勤　校阅：赵修利)

利特尔定律 [Little law]　利特尔定律阐明了等待服务的平均顾客数和顾客的平均等待时间之间的一种关系，及系统的队长和顾客在系统中逗留时间之间的关系。具体地来讲，利特尔定律给出此系统中顾客数的均值等于顾客在系统中逗留时间均值乘以顾客到达系统的速度。

对很一般的排队系统，利特尔定律都成立。如对 $M/M/1$ 系统，顾客到达时间间隔和服务时间分别服从参数为 λ 和 μ 的负指数分布。时刻 t 系统的队长记为 $Q(t)$，而等待服务的顾客数记为 $Q_q(t)$，时刻 t 顾客在系统的逗留时间记为 $W(t)$，而等待服务时间记为 $W_q(t)$。知在 $t\to\infty$ 时，$Q(t), Q_q(t), W(t)$ 及 $W_q(t)$ 均分别地依分布收敛到随机变量 Q, Q_q, W 和 W_q，且有如下关系

$$EQ=\lambda EW。$$

$$EQ_q=\lambda EW_q。$$

这两个关系均称作利特尔定律。注意到 $EW=EW_q+\mu$，对给定一个排队系统，若知利特尔定律成立，则我们可以从队长的均值、等待服务的顾客数均值、逗留时间的均值和等待服务的时间均值中的任何一个求出其他三个来。

(执笔：张汉勤　校阅：赵修利)

波拉切克–辛钦公式 [Pollaczek-Khinchin formula] 用来描述顾客的等待时间与顾客的服务时间之间的一种关系。通常对一般系统，这个关系非常复杂，而对于 $M/G/1$ 系统，这种关系变得非常清楚。让顾客到达时间间隔遵从参数为 λ 的负指数分布，而顾客所用的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$。记

$$\mu^{-1}=Ev_1,\quad H(x)=\Pr(v_1\leqslant x)。$$

$H^*(s)$ 为 $H(x)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换。W_n 表示第 n 个到达的顾客等待时间。则当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时，W_n 依分布收敛到 W_q。记 $W(x)=\Pr(W_q\leqslant x)$，$W^*(s)$ 为 $W(x)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换，则有

$$W^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda H^*(s)},$$

由此立刻又有

$$EW_q=\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2+\lambda^2E\left(v_1-\dfrac{1}{\mu}\right)^2}{2\lambda\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)},$$

这二者均称为波拉切克–辛钦公式。

由上述关系，又可得到顾客的等待时间平稳分布 $W(x)$ 和顾客剩余服务时间平稳分布 $H_r(x)$ 之间的关系。按更新过程理论，顾客剩余服务时间平稳分布是

$$H_r(x)=\mu\int_0^x[1-H(x)]\mathrm{d}x,$$

则 $H_r(x)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为

$$\begin{aligned}H_r^*(s)&=\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}H_r(x)\\&=\frac{\mu}{s}(1-H^*(s)),\end{aligned}$$

由

$$W^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda H^*(s)},$$

得

$$W^*(s)=\frac{1-\rho}{1-\rho\left[\dfrac{\mu}{s}(1-H^*(s))\right]},$$

即

$$W^*(s)=\frac{1-\rho}{1-\rho H_r^*(s)},$$

此关于顾客等待时间与顾客剩余服务时间的关系有时也称为波拉切克–辛钦公式。

(执笔：张汉勤　校阅：赵以强)

乘积形式 [product form]　是在研究排队网络一些数量指标的平稳分布的过程中提出来的。满足乘积形式的排

队网络，它的平稳分布具有某种乘积形式。我们以一个具有 J 个节点的开杰克逊网为例。对于第 j 个节点，假定从网络外部到达顾客的到达时间间隔和服务时间分别遵从参数为 α_j 和 μ_j 的负指数分布。服务完顾客的转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{J\times J}$。由话务方程

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_J)+((\lambda_1\wedge\mu_1),\cdots,(\lambda_J\wedge\mu_J))\boldsymbol{P}$$

解出 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_J)$。第 j 个节点处话务强度 $\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$ 记为 ρ_j，队长过程记为 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$，其中 $Q(t)=(Q_1(t),\cdots,Q_J(t))$ 及 $Q_j(t)$ 为 t 时刻第 j 个节点处的队长。当 $\rho_j<1,\ \ j=1,\cdots,J$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty}\Pr(Q(t)=(k_1,\cdots,k_J))=\prod_{j=1}^{J}(1-\rho_j)\rho_j^{k_j},$$

此式表明，开的杰克逊网络队长平稳分布具有乘积形式。进一步讲，队长的联合平稳分布可以看成 J 个独立 $M/M/1$ 系统的队长分布，其中第 j 个 $M/M/1$ 系统输入是参数为 λ_j 的泊松过程，服务的负指数分布参数仍然为 μ_j。

类似地，我们可以从排队网络的扩散逼近角度来谈乘积形式。一般地讲，由于其扩散逼近也往往是一个多维随机过程，如果它的平稳分布具有乘积形式，就称该排队网络的扩散逼近具有乘积形式。

（执笔：张汉勤　校阅：赵修利）

可逆性 [reversibility]　可逆性是用来研究一类排队系统的顾客离去过程及乘积形式。为定义一个排队系统是否可逆，先引进一个随机过程可逆的定义。对一个离散时间的随机过程 $\{X(n)|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，对任何整数 m，定义一个新的过程 $\{\widetilde{X}^{(m)}(n)|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，其中 $\widetilde{X}^{(m)}(n)=X_{m-n}$。若对任何整数 m，$\{\widetilde{X}^{(m)}(n)|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 与 $\{X(n)|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 有相同的有限维分布，则称 $\{X(n)|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为可逆的。对一个连续时间的随机过程 $\{X(t)|-\infty<t<\infty\}$，则定义 $\{\widetilde{X}^{(s)}(t)|-\infty<t<\infty\}$，其中 $\widetilde{X}^{(s)}(t)=X(s-t)$。若对任何实数 s，$\{\widetilde{X}^{(s)}(t)|-\infty<t<\infty\}$ 和 $\{X(t)|-\infty<t<\infty\}$ 有相同的有限维分布，则称过程 $\{X(t)|-\infty<t<\infty\}$ 为可逆的。

一个排队网络是可逆的，若描述该系统的随机过程是一个可逆过程。对 $M/M/1$ 系统，若系统的初始队长为 n 的概率是 $\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n$，其中 λ 为顾客的到达时间间隔负指数分布的参数，μ 为顾客服务时间的负指数分布参数，且满足 $\dfrac{\lambda}{\mu}<1$。则队长过程 $\{Q(t)|-\infty<t<\infty\}$ 是一个可逆过程。由过程的可逆性定义知，此系统的顾客离去过程也是一个参数为 λ 的泊松过程。

（执笔：张汉勤　校阅：赵修利）

见时间平均的泊松到达 [**Poisson arrivals see time averages (PASTA)**]　用来研究对于一个排队系统的队长过程 $\{Q(t)|t\geqslant 0\}$ 的平稳分布是否等于第 n 个顾客到达时见到的队长 Q_n 的平稳分布，即

$$\lim_{t\to\infty}\Pr(Q(t)=k)=\lim_{n\to\infty}\Pr(Q_n=k)$$

是否成立的问题而提出的。若具有这个性质就称具有见时间平均的泊松到达性质。其一般结果为，若顾客到达过程是泊松到达，则此性质成立。例如 $M/G/1$ 系统就具有这个性质，而 $G/M/1$ 系统则一般不具有这个性质。

（执笔：张汉勤　校阅：赵修利）

林德利方程 [**Lindley equation**]　在研究到达顾客等待时间时得到的一种关系式。具体地讲，对于一个 $G/G/1$ 系统，记顾客到达时间间隔序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，顾客的服务时间序列为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$。令 W_n 为第 n 个顾客的等待时间，则有林德利方程

$$W_{n+1}=\max\{W_n+v_n-u_{n+1},\ 0\},\quad n=1,2,\cdots。$$

令 v_1-u_2 的分布函数为 $F(\cdot)$，由林德利方程知，对任何 $t\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}\Pr(W_{n+1}\leqslant t)&=\Pr(W_{n+1}=0)+\Pr(0<W_{n+1}\leqslant t)\\&=\Pr(W_n+v_n-u_{n+1}\leqslant 0)\\&\quad+\Pr(0<W_n+v_n-u_{n+1}\leqslant t)\\&=\Pr(W_n+v_n-u_{n+1}\leqslant t)\\&=\int_{-\infty}^{t}W_n(t-x)\mathrm{d}F(x)。\end{aligned}$$

当 $\dfrac{Eu_1}{Ev_1}<1$ 时，W_n 依分布收敛到 W，且有

$$\Pr(W\leqslant t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}W(t-x)\mathrm{d}F(x), & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0。\end{cases}$$

此方程称为林德利积分方程，也是一种维纳–霍普夫型积分方程。

（执笔：张汉勤　校阅：赵以强）

cμ* 准则** [cμ* rule**]　用来研究当一个服务台服务多类顾客，给定一定目标函数之后，如何设定最优服务规则使得在给定的目标函数之下系统的性能达到最优。具体地考虑一个单服务台，它服务 K 类顾客。对第 i 类顾客，该类顾客的服务时间相互独立且遵从相同的参数为 μ_i 的负指数分布。让 $Q_i(t)$ 表示时刻 t 第 i 类顾客的队长，目标函数为

$$\sum_{i=1}^{K}c_iEQ_i(t)。$$

问题是如何选择服务规则使得此目标函数值为最小。为此我们假定系统是遍历的，即对每一类顾客 $Q_i(t)$ 依分布收敛到 Q_i 且 $\Pr(Q_i < \infty) = 1$。则上述问题可转化成决定服务规则使得

$$\sum_{i=1}^{K} c_i E Q_i$$

为最小。然后 $c\mu$ 准则告诉我们最优的服务规则就是按优先权进行服务。具体的优先权按 $c_i\mu_i$ 大小顺序来给定。

(执笔：张汉勤　校阅：赵修利)

17.9　可靠性理论 · 更新论

可靠性理论 [reliability theory]　以产品的失效现象和寿命特征为研究对象的一门综合性和边缘性的科学，它涉及基础科学、技术科学和管理科学的许多领域。

可靠性问题的提出，是由于大工业生产及第二次世界大战中研制和使用复杂的军事装备的需要。虽然单元产品的可靠性已有了很大的提高，但是由于大型系统的结构越来越复杂，要求其完成的功能越来越广泛，因此定量评定和改善系统可靠性已成为一个非常重大的课题。从 20 世纪 50 年代至今可靠性理论这门学科以惊人的速度发展着，它的应用已从军事技术扩展到国民经济许多领域。

要提高产品的可靠性，需要在材料、设计、工艺、使用维修等多个方面去努力。可靠性工程和可靠性管理贯穿于产品的研制、生产、使用维修，直到报废的全过程。因此，可以说产品可靠性的改善主要是一个工程问题和管理问题。可靠性数学在其中所占的分量并不是很大。然而，作为一个必不可少的工具，可靠性数学在可靠性理论中有着特殊的地位。要研究产品的寿命特征，离不开对产品寿命的定量分析和比较，从这种意义上来看，可以说可靠性理论是一门定量的科学。可靠性理论的许多基本概念和定义是用数学术语给出的，可靠性理论中大量运用数学模型和数学方法。因此可靠性数学与可靠性工程、可靠性管理等手段紧密结合就能很好发挥可靠性理论应有的作用。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

可靠度 [reliability]　产品的可靠度是产品在规定的条件下和规定的时间内完成规定功能的概率。通常用非负随机变量来描述产品的寿命，其分布函数为

$$F(t) = P\{X \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0。$$

产品在时间 $[0, t]$ 内都正常 (不失效) 的概率，即产品在时刻 t 的生存概率为

$$R(t) = P\{X > t\} = 1 - F(t),$$

其中 $R(t)$ 称为该产品的可靠度函数，或简称为可靠度。对于一个给定的产品，规定的条件和规定的功能确定了产品寿命 X 这个随机变量，规定的时间就是以上公式中的 $[0, t]$。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

可用度 [availability]　可修产品重要的可靠性指标之一。瞬时可用度 $A(t)$ 是产品在规定的条件下和规定的时刻 t 处于能执行规定功能状态的概率。稳态可用度 A 是瞬时可用度的极限 (如果存在)

$$A = \lim_{t \to \infty} A(t)。$$

在工程应用中特别感兴趣的是稳态可用度，它表示经长期运行后，产品处于正常状态所占的时间比例。在某些条件下，稳态可用度可表示为

$$A = \frac{MUT}{MUT + MDT}。$$

其中 MUT 为产品平均可用时间长度，MDT 为产品平均不可用时间长度。

工程中常用的可修系统有：多个单元组成的可修串联系统、并联系统、表决系统等。当各单元的寿命分布、故障后的修理时间分布，及其他相关的分布函数均为指数分布时，系统可用马尔可夫过程来描述，此时可通过解线性方程组的方法求出系统的稳态可用度。对于较简单的系统，还可以通过解微分方程组的方法求得系统的瞬时可用度。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

结构函数 [structure function]　系统的状态与由其组成的各单元的状态之间的函数关系。一个由 n 个单元组成的系统，如果系统和单元都只有正常和失效，分别用 1 和 0 表示。用变量 x_i 表示第 i 个单元的状态

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 个单元正常；} \\ 0, & \text{若 } i \text{ 个单元失效。} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

用 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示单元的状态向量。用函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 表示系统的状态

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \boldsymbol{x} \text{ 使系统正常；} \\ 0, & \text{若第 } \boldsymbol{x} \text{ 使系统失效。} \end{cases}$$

$\varphi(\boldsymbol{x})$ 称为系统的结构函数。

例如：

1. 串联系统，即 n 个单元中有一个或一个以上的单元失效，系统就失效，此时

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \min_i x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i。$$

2. 并联系统，即仅当 n 个单元都失效系统才失效，此时

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \max_i x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)。$$

3. $k/n(F)$ 系统 (表决系统)，即 n 个单元中有 k 个或 k 个以上单元失效，系统就失效，此时

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & 当 \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n-k+1; \\ 0, & 当 \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n-k。\end{cases}$$

对网络系统以及仅含或门和与门的故障树，只需求得系统的所有最小路集或所有最小割集，就能写出系统结构函数的表达式。

结构函数的定义可以由两状态推广到多状态。

(执笔：曹晋华 校阅：刘克)

故障率 [failure rate] 亦称失效率，用非负随机变量 X 来表示不可修产品的寿命，其分布函数为 $F(t)$, 可靠度为 $R(t) = 1 - F(t)$。该产品生存到时刻 t, 称之为有年龄 t, 在其后长度为 x 的区间中失效的条件概率为

$$\begin{aligned} F(x|t) &= P\{X \leqslant t + x | X > t\} \\ &= \frac{F(t+x) - F(t)}{R(t)}, \quad R(t) > 0。\end{aligned}$$

若极限 $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{\Delta t} F(\Delta t|t) = r(t)$ 存在，则 $r(t)$ 称为产品在时刻 t 的失效率。当 Δt 很小时，$r(t)\Delta t$ 可解释为产品在生存到 t 时刻的条件下，在 $(t, t+\Delta t]$ 中失效的概率。当寿命 X 是连续型随机变量，即 $F'(t) = f(t)$ 存在时，则有 $r(t) = f(t)/R(t), R(t) > 0$。此时失效率 $r(t)$ 和可靠度 $R(t)$ 有如下的基本关系 $R(t) = \exp\left[-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u\right], t > 0$。因此 $F(t), R(t)$ 或 $r(t)$ 中任意一个都可用来描述不可修产品的寿命特征。

当产品的寿命为离散型随机变量 X, 其分布为

$$p_k = P\{X = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

则其失效率为

$$r(k) = p_k / \sum_{i=k}^{\infty} p_i, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

(执笔：曹晋华 校阅：刘克)

故障频度 [failure frequency] 可修产品重要的可靠性指标之一。可修产品在时间区间 $(t, t+\Delta t]$ 内平均故障次数与时间区间长度 Δt 之比，当 Δt 趋于 0 时的极限 (如果存在)，即

$$M(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[N(t+\Delta t) - N(t)]}{\Delta t},$$

其中 $N(t)$ 为产品在时间区间 $(0, t]$ 内的故障次数，$M(t)$ 称为可修产品在时刻 t 的瞬时故障频度。称

$$M = \lim_{t \to \infty} M(t)$$

为产品的稳定故障频度。在工程应用中对稳态故障频度更感兴趣，它表示产品经长期运行，单位时间内的平均故障次数。

工程中常用的可修系统有：多个可修单元组成的串联系统、并联系统、表决系统等等，如果各单元的寿命分布、故障后的修理时间分布、及其他有关的分布函数均为指数分布时，系统可用马尔可夫过程来描述，此时可通过解线性方程组的方法求得系统的稳态故障频度。对于较简单的系统，还可通过解微分方程组的方法求得系统的瞬时故障频度。

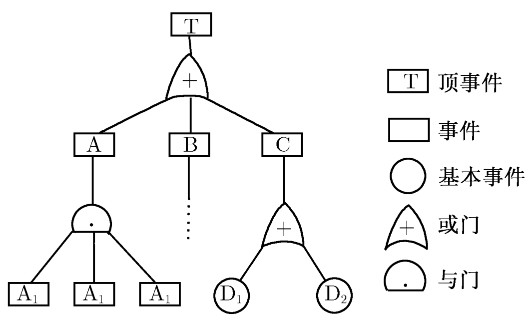
(执笔：曹晋华 校阅：刘克)

故障树分析 [fault tree analysis (FTA)] 系统可靠性和安全性分析的工具之一。FTA 是通过对可能造成产品故障的硬件、软件、环境、人为因素进行分析，画出故障树，从而确定产品故障原因的各种可能组合方式和 (或) 其发生概率的一种分析技术。在系统设计阶段，FTA 可帮助判明潜在的故障，以便改进设计 (包括维修性设计)，在系统使用维修阶段可帮助故障诊断，改进使用维修方案。

通常进行 FTA 的程序是：

(1) 选择顶事件。根据分析的目的、确定与系统有关的最重要故障事件。

(2) 建立故障树。首先分析顶事件，寻找顶事件发生的直接的必要和充分的原因，即下一层故障事件。如果下一层故障事件中任何一个发生就会导致顶事件发生，则用“或门”相联系；如果所有输入事件发生才导致顶事件发生，则用“与门”相联系。如果该事件还能进一步分解，如同顶事件那样的处理。重复上述步骤，逐级向下分解，直到所有输入事件不能再分解 (称为基本事件)，或不必要再分解为止，这些输入事件即为故障树的底事件。



故障树

(3) 定性分析和定量分析。定性分析的主要目的是寻找导致顶事件发生的原因和原因组合，即寻找导致顶事件发生的

所有故障模式；定量分析的主要目的是，当给定所有底事件发生的概率时，求出顶事件发生的概率及其定量指标。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

故障模式和效应分析 [failure mode and effect analysis (FMEA)]　FMEA 分析产品中每一可能的故障模式，并确定其对产品及上层产品所产生的影响，以及把每一个故障模式按其影响的严重程度予以分类。FMEA 的进一步发展称为故障模式效应与危害性分析 (failure mode, effect and criticality analysis，FMECA)。FMECA 较 FMEA 进一步考虑了故障发生的概率与故障危害性的等级。

FMEA 和 FMECA 都采用“自下而上”由因到果的逻辑归纳法，其目的是在设计初期对产品设计进行评价，对每一个可能的故障模式、影响及危害性进行分析，以便做出设计评审和修改，预防产品在试验及使用时发生故障。

FMEA 和 FMECA 包括以下步骤：

(1) 列出产品所有零部件的全部故障模式和产生原因；

(2) 根据产品的可靠性逻辑关系，用归纳推理的方法，分析上述各种故障模式对产品各功能级别造成的影响和后果；

(3) 判断每种故障模式对产品各功能级别造成的故障影响的等级；

(4) 如果需要的话，还应估计上述故障影响产生的概率，如果是单因素分析，则故障影响发生的概率就是导致该故障影响的故障模式的发生概率；

(5) 对于 FMECA，则应根据故障影响的严重等级和发生概率估计出相应的危害度；

(6) 提取那些后果严重的故障影响的相关信息，诸如故障模式及其产生原因，严重等级或危害度，制定一个精练的表格，便于及时采取综合措施，将潜在的可能导致严重后果的故障模式尽早消除。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

单调关联系统 [coherent system]　亦称协调系统。单调关联系统具有下面两个性质：① 系统中任一单元的失效，会使系统性能反而改善；② 系统中不包含多余的对其性能不发生影响的单元。具体的可以用系统的结构函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 来表述：具有以下两个性质的系统称为单调关联系统：① $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是单调函数，即若 $x_i \leqslant y_i, i=1,2,\cdots,n$, 则有 $\varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi(\boldsymbol{y})$; ②对任意单元 i, 存在状态向量 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\varphi(0_i,\boldsymbol{x})=0, \quad \varphi(1_i,\boldsymbol{x})=1,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是单元的状态向量，$(0_i,\boldsymbol{x})$ 和 $(1_i,\boldsymbol{x})$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量分别以 0 和 1 代替后所得的向量。

典型的单调关联系统有串连系统、并联系统、串并混连系统、表决系统、网络系统，以及仅含与门与或门的故障树等。单调关联系统研究的主要问题是复杂系统结构函数的表达式、系统可靠度的求法，及其上下界等。

两状态单调关联系统可以推广到多状态单调关联系统。然而由于推广的方向不同，可以定义出多种不同的多状态单调关联系统。为反映单元的状态和系统功能的渐变性，多状态单调关联系统的研究已得到重视，并有所进展。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

可修系统 [repairable system]　可通过修复性维修恢复到规定状态并值得修复的产品称为可修产品。对于由多个单元组成的系统，或整个系统为可修产品，或组成该系统的若干单元为可修产品，则称该系统为可修系统。可修系统的研究还应包括修理设备、维修人员，以及维修规则等因素。

工程中常用的可修系统有：多个单元组成的可修串联系统、并联系统、表决系统等。当各单元的寿命分布、故障后的修理时间分布，及其他有关的分布函数均为指数分布时，系统可用马尔可夫过程来描述，并可求得系统的各种可修性数量指标，例如系统首次故障前时间分布及其均值、系统可用度、系统故障频度等。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

系统可靠性 [system reliability]　系统可靠性是由系统的结构以及组成系统的所有单元的可靠性决定的。工程中最常用的不可修系统是：串联系统、并联系统、表决系统、串并混联系统、储备系统、网络系统、用故障树描述的系统等。当已知组成系统的各单元的可靠度，可以计算出这些系统的可靠度及其他数量指标。

可修系统的组成单元中包含维修设备和维修人员等维修性因素，情况要复杂些。对较简单的可修系统和一些特殊的可修系统才能求得系统的各种可靠性的数量指标。特别当各单元的寿命分布、单元故障后的修理时间分布，以及其他的有关分布函数均为指数分布的情形，这样的可修系统中的状态随时间的进程能够用马尔可夫过程来描述，可通过解线性方程组的方法求得系统稳态可靠性数量指标。对特别简单的系统还可求得系统瞬态可靠性数量指标。

对于带有维修策略或更换策略等控制机制的系统，其中包括费用结构等因素，涉及寻求最优策略的最优化问题。对维修 (更换) 策略和依赖状态的维修 (更换) 策略的研究是可靠性理论研究的热点课题之一。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

系统的寿命 [lifetime of system]　多个单元组成的不可修系统的寿命依赖于系统的结构和各单元的寿命或可靠度。例如，n 个单元组成的串联系统的寿命

$$X=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)。$$

当各单元相互独立时，系统的可靠度为

$$R(t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t);$$

n 个单元组成的并联系统的寿命

$$X=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)。$$

当各单元相互独立时，系统的可靠度为

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t));$$

以上 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为各单元的寿命，$R_1,R_2,\cdots,R_n$ 为各单元的可靠度。

工程中常用的网络系统，仅含或门和与门的故障树，可以通过求系统的所有最小路集，或求系统的所有最小割集的方法来得到系统寿命的表达式，并有有效的算法求得系统的可靠度。

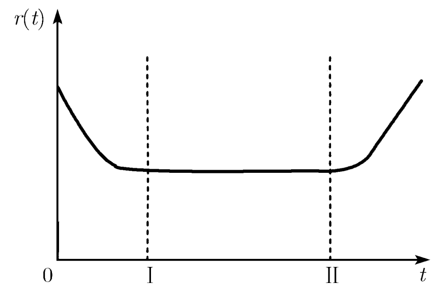
（执笔：曹晋华 校阅：刘克）

剩余寿命 [residual life] 产品从时刻 0 开始工作，直到时刻 x 仍然正常，称之为有年龄 x。对于年龄为 x 的产品，继续生存到产品失效时刻的时间长，称为年龄为 x 的剩余寿命。若 X 为产品的寿命，其分布函数为 $F(t),\mu$ 为平均寿命，则产品年龄为 x 的剩余寿命分布是

$$F_x(t)=P\{X-x\leqslant t|X>x\}=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)},$$
$$(t\geqslant 0,x\geqslant 0,1-F(x)>0)。$$

（执笔：曹晋华 校阅：刘克）

浴盆曲线 [bath-tub curve] 失效率函数是产品最重要的可靠性指标之一。不可修产品典型的失效率函数形状见下图，它呈现出浴盆形状，所以常称作浴盆曲线。从图中可见，在 I 以前失效函数 $r(t)$ 呈下降趋势，这是早期失效期，主要是由于产品的设计错误、工艺缺陷、装配问题、质量检验不严等原因引起的。由于在这段时间中产品的失效率很高，所以工厂中实际采用筛选的方法剔除一批不合格的产品，以减少产品的早期失效率。在 I 和 II 之间的一段 $r(t)$ 基本保持常数，这是偶然失效期，又称产品使用寿命期。这段时间是产品最佳的工作阶段。在 II 以后 $r(t)$ 又有上升趋势，这是磨损失效期。由于产品老化、疲劳和磨损等，产品性能逐渐劣化。此时应采用维修或更换等手段来维持产品正常运行。



浴盆曲线

人的死亡率函数也具有浴盆曲线的形状。在幼儿期由于对外界缺乏抵抗力，或由于部分幼儿先天缺陷，因此死亡率较高。随着年龄增长，死亡率逐渐下降。到了青壮年死亡率最低，而且趋于稳定，这时死亡大都是由于意外事故 (例如车祸、工伤等各种意外灾害) 等外界因素所致。进入老年期由于血管、心脏等各种器官的老化，致使死亡率迅速上升。

（执笔：曹晋华 校阅：刘克）

寿命试验 [life testing] 对产品的寿命特征进行测试、定量或分类所实施的实验。寿命试验的目的可分为验证试验和测定试验。验证试验是证明产品的寿命特征是否符合规定要求的试验；测定试验是确定产品寿命特性值的试验。从试验的环境来说，寿命试验可分为实验室试验和现场试验。实验室试验是在规定与控制的条件下所做的验证试验或测定试验；现场试验是在工作、环境和测量条件均作记录的现场进行的验证试验或测定试验。

恒定应力环境下的寿命试验方法是基本的可靠性试验方法。但是对于寿命特别长的产品来说，它需要花费很长的试验时间，甚至来不及做完试验产品已经更新换代了，所以这种方法与产品的迅速发展是不相适应的。在实践中通常采用加速寿命试验的方法。加速寿命试验的方法的基本思想是用加大应力 (诸如热应力、电应力、机械应力等) 的方法，加快产品失效，缩短试验时间，运用加速寿命模型估计产品在正常应力下的可靠性等寿命特性。加速寿命试验大致分为：恒定应力加速寿命试验、步进应力加速寿命试验和序进应力加速寿命试验。

（执笔：曹晋华 校阅：刘克）

复杂系统可靠性 [complex system reliability] 20 世纪 80 年代前后，许多的复杂系统得到大规模应用，包括先进飞行控制系统、卫星通信系统、指挥自动化系统，等等。这些系统不能视为简单系统，因为其具有两个特征：一是出现多种不确定性，包括概率意义下的随机性和非概率意义下的不确定性 (模糊性)，而概率往往不是以精确值表示；二是系统结构相对复杂，具有多类状态，系统结构可能由执行的功能和运行环境的不同而变化，因呈现动态、变结构属性。常规可

靠性理论与方法无法全面刻画复杂系统可靠性行为。复杂系统可靠性理论与方法自 20 世纪 80 年代以来得到较系统的发展，主要包括以下几个方面。

(1) 变结构 (variable-structure)单调关联系统可靠性理论：一个变结构单调关联系统由若干个子系统组成，这些子系统本身是单调关联系统，但整个系统的结构可能因运行环境、执行功能、或系统状态的变化而从一个子系统切换到另一个子系统。

(2) 率模 (profust) 可靠性理论：建立在概率假设和模糊状态假设基础之上。模糊状态假设认为，元件或系统失效的准则具有模糊性，任一时刻元件和系统在某种程度上处于模糊正常状态，又在某种程度上处于模糊失效状态。

(3) 能双 (posbist) 可靠性理论：建立在可能性假设和二态假设基础之上。可能性假设认为，元件和系统可靠性行为的不确定性可以可能性测度完全刻画。

(4) 能模 (posfust) 可靠性理论：建立在可能性假设和模糊状态假设基础之上。

(5) 鲁棒 (robust) 可靠性方法：主要适用于度量结构可靠性和优化设计满足可靠性约束条件的结构。假设一个给定结构有多种不确定性变量，每种变量具有一个标定值和以百分比 (称为不确定性参数) 表示的变化范围。使结构不发生失效的不确定性参数的最大值被称为结构的鲁棒可靠度。

(6) 不精确 (imprecise) 可靠性方法：源于不精确概率理论在可靠性分析中的应用。这些方法主要考虑在关于可靠性行为的信息不完全，或不同元件可靠性行为不是相互独立情况下如何以不精确的概率值表示元件或系统可靠度。区间数是不精确的概率值的一种简单和常用的表达形式。

(执笔：蔡开元　校阅：刘克)

软件可靠性 [**software reliability**]　软件错误(software error)是指软件开发过程中管理人员、开发人员或其他技术人员所犯的错误，其结果是导致软件有缺陷。软件缺陷(software defect)是存在于软件之中的那些不希望或不可接受的偏差，如少一逗点、多一语句等等，是一种静态表现形式。其结果是软件运行于某一特定条件时出现软件故障，这时称软件缺陷被激活。软件故障 (software fault)是指软件运行过程中出现的一种不希望或不可接受的内部状态，如处于执行一个多余循环过程，等等，是一种动态行为。此时若无适当措施 (容错) 加以及时处理，便产生软件失效，即软件运行时产生的一种不希望或不可接受的外部行为结果。

软件可靠性研究和实践有三个基本问题：第一，软件为什么失效；第二，如何开发可靠的软件；第三，如何检验软件可靠性。软件可靠性问题的难点在于软件高度复杂，以及软件行为具有多种形式 (概率和非概率) 的不确定性。一个数十条语句的程序可能因内部循环或状态组合而具有天文数字的不同路径。软件输入的选取具有概率意义下的不确定性。但软件拷贝原则上不改变软件本身，因而软件是唯一的。同时，软件是一种逻辑产品，不具有物理退化性质。这些因素导致软件行为具有非概率意义下的不确定性。

软件可靠性度量有两类，一类是静态的，譬如软件剩余缺陷个数。另一类是动态的，譬如软件可靠度、软件失效率等等。软件可靠度的常用定义是规定时间内和规定运行环境中软件不发生失效的概率。由于非概率不确定性的存在，这种定义存在争议。

安全关键软件(safety-critical software)往往要求具有超高可靠性，譬如其失效率低于 10^{-9} 次/小时。如何使软件满足这种超高可靠性要求并加以验证是对人类智力的挑战，需要采用软件工程、形式化、定量化等等不同方法，从不同角度深入研究软件可靠性问题。因此，软件可靠性研究是一个多学科交叉研究领域，涉及软件工程、理论计算机科学、系统可靠性、数理统计与随机分析、控制论等不同学科。

Internet 技术的广泛应用对软件可靠性研究提出新的课题。网络服务(web service)、基于服务 [的] 系统 (service-based system) 运行于开放的 Internet 环境中，与运行于封闭环境下的传统软件有很大不同，可靠性问题与信息安全问题密切相关。

(执笔：蔡开元　校阅：刘克)

更新论 [**renewal theory**]　研究关于重复事件过程的数学理论。它始于研究可靠性系统中常见的重复性的随机过程问题。所谓重复，比如一架机器在全面维修后的操作性能可以被认为与一架新机器一样，因此，凡是与机器操作性能有关的产出过程可以被认为是上次全面维修后的产出过程的一个重复。由于零部件的寿命通常是随机的，全面维修事件的发生也通常是随机的，因此，这里所说的重复是在统计意义下的重复。更新论研究关于这种重复性的随机过程的数学概念和性质，包括有：更新过程、再生过程、更新方程、及更新函数等等。随着更新论的发展，这些概念与性质不仅应用于可靠性理论，也在其他应用概率分支有着广泛应用，如排队论及库存理论等等。

(执笔：宋京生　校阅：刘克)

更新过程 [**renewal process**]　一种特殊的随机过程，是一个记录到时刻 t 为止发生的某种具有重复性质的随机事件总数的随机过程。比如在很多排队系统中，顾客的到达是一种随机事件，因此描述到时刻 t 为止一共来了多少顾客是一个随机的计数过程。更新过程的特点是其相继事件到达间隔是任意独立并且同分布的随机变量。在排队论中常见的泊洼松顾客到达过程便是一个特例。在这个例子里，顾客相继到达间隔是独立并且同指数分布的随机变量。下面，给出更新过程的正式数学定义：令 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一系列非负独立随

机变量有着共同分布函数 F。假设 $F(0)=P\{X_n=0\}<1$。这里 X_n 代表第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件到达时间的间隔 ($n=1$ 时表示第一个事件到达的时间长度)。定义

$$S_0=0,$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n=1,2,\cdots。$$

那么 S_n 就是第 n 个事件的到达时间。令 $N(t)$ 是到时刻 t 为止发生的事件总数，也就是 $N(t)=\sup\{n|S_n\leqslant t\}$。我们称计数过程 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 为更新过程。

根据所处理的各种实际问题，人们又提出了各种特殊的更新过程和概念更为宽泛的更新过程，例如有：交错更新过程、更新报酬过程、延迟更新过程等等。

(执笔：宋京生　校阅：刘克)

再生过程 [regenerative process]　考虑一个以 $\{0,1,2,\cdots\}$ 为状态空间的随机过程 $\{X(t),t>0\}$。如果以概率 1 存在一个时间点 S_1 使得这个过程在 S_1 点以后的延续，即 $\{X(t),t>S_1\}$ 是与从时间 0 开始的整个过程 $\{X(t),t>0\}$ 的一个概率复制，那么我们称这个过程为一个再生过程 (或称为再新过程)。从以上的性质可以推断出在 S_1 点以后还存在具有 S_1 点性质的时间点 S_2，$S_3,\cdots$。这些 $\{S_1,S_2,\cdots\}$ 便构成了一个更新过程的事件发生时间序列。在一个只有单个服务台的排队系统中，如果顾客到达过程是一个更新过程，那么 $X(t)$，在时刻 t 逗留在系统里的总顾客人数，是一个以再生过程的前提是 $X(0)=0$。也就是说，每一次当一个顾客到达时发现系统是空的，那么其新的再生周期便开始了。

再生过程除了在可靠性数学理论中有着广泛的应用以外，还在*排队论*、*库存理论*、以及*决策论*等很多领域里有着广泛的应用。

(执笔：宋京生　校阅：刘克)

更新密度 [renewal density]　令 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为一系列有共同分布函数 F 的非负独立随机变量。假设 $F(0)=P\{X_n=0\}<1$。这里 X_n 代表第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件到达时间的间隔 ($n=1$ 时表示第一个事件到达的时间长度)。定义

$$S_0=0,$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n=1,2,\cdots。$$

那么 S_n 就是第 n 个事件的到达时间。令 $N(t)$ 是到时刻 t 为止发生的事件总数，也就是 $N(t)=\sup\{n|S_n\leqslant t\}$。那么 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程。$N(t)$ 的数学期望 $m(t)=E[N(t)]$ 被称为*更新函数*，其导数 $m'(t)$ 被称为更新密度。令 F_n 为 S_n 的分布函数，则 F_n 是 F 的 n 阶卷积 (convolution)。此时，更新函数具有表达式：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)。$$

而更新密度函数的表达式通常比较复杂。

(执笔：宋京生　校阅：刘克)

更新方程 [renewal equation]　更新函数(见*更新密度*) 满足的一类方程。*更新过程*$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 的更新函数 $m(t)=E[N(t)]$ 所满足的方程

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-x)\mathrm{d}F(x)$$

被称为更新方程。

更为一般的，对于已知函数 $a(t)$ 及分布函数 $F(t)$，如果未知函数 $A(t)$ 满足积分方程

$$A(t)=a(t)+\int_0^t m(t-x)\mathrm{d}F(x),$$

因此积分方程就被称为更新方程。这里需要注意的是函数 $a(t)$ 所代表的含义已经被推广，可以是剩余寿命的函数、也可以代表具体问题中的某个期望值函数等等。当 $a(t)=F(t)$ 时就是原来定义的更新方程。

人们对更新方程最为关心的问题有：在什么条件下方程的解存在且唯一，以及解具有什么性质等等。

(执笔：宋京生　校阅：刘克)

更换理论 [replacement theory]　产品更换是产品维修过程中的重要环节之一。产品更换方式分为事后更换和预防性更换。用新的同类产品去更换已经发生故障的产品，使其恢复到能执行规定功能的状态，称为事后更换。用新的同类产品去更换使用中尚未发生故障、但性能已经退化的产品，称为预防性更换。

事后更换方式虽然管理方便，但是使用中的产品随着役龄的增长，其性能逐渐退化，造成生产效率下降，维护费用上升。因此，从经济的角度上看，简单地使用事后更换不是好的更换策略。更何况对有些产品故障后再去更换，不仅会造成重大经济损失，有时会造成严重的灾难性事故 (例如电力供应中断等)。此时需要采用预防性更换方式来避免和减少产品的突发性故障。

针对不同的环境和产品退化、失效的特点，研究更换的决策行为的理论就是更换理论。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

更换策略 [replacement strategy]　在实践中通常使用事后更换和预防性更换相混合的更换策略。常见的三个最基本的更换策略：

(1) 役龄更换策略：当产品达到指定的役龄 T 仍然正常，则对产品作预防性更换，若产品在 T 以前发生故障，则对产品作事后更换。

(2) 周期更换策略：产品在给定的时刻 kT, (k=1,2,$\cdots$) 作预防性更换，产品在故障时作事后更换。

(3) 伴随小修的周期更换策略：产品在给定的时刻 kT, (k=1,2,$\cdots$) 作预防性更换，产品在故障时作应急的小修，但修理后产品的役龄不变。

显然上述更换策略中时间 T 选得过大过小都不好。对给定的数学模型，选择某个目标函数 (例如可用度或费用支出)，可以求得最优的时间 T。

以上介绍的均为依赖于时间的预防性更换策略。对有些产品依赖于时间的预防性更换策略不是好的更换策略，常常到了该进行预防性更换的时刻，产品还十分完好。因此引进了一类依赖于产品状态的预防更换策略，称为状态监视更换策略，即在产品运行过程中随时观测产品所处的状态，当产品因性能退化而进入到一定的状态集，则对其进行预防性更换。状态监视更换策略能比较好地利用产品所处状态的信息，常常比依赖于时间的更换策略优越。它的缺点是：①观测产品的状态可能要花较大的费用；②观测产品的状态可能不准确；③ 这类策略的模型比较复杂，用到的数学理论比较深。在工程实践中状态监视更换策略更多的要靠工程技术和管理人员的实践经验。

(执笔：曹晋华　校阅：刘克)

17.10　库存论 · 供应链管理

库存论 [inventory theory]　亦称存储论，研究商品存储问题。为了维持正常的生产、经营活动，人们需要一定数量的储备资源来支撑。工厂为了能连续生产，需要储存一定的原材料或半成品。零售商为了及时满足顾客的需求，要有足够的库存商品。银行业为进行正常的营业，需要一定的货币余额进行周转。库存的适当调节可以满足高于平均水平的顾客需求，也可以防止低于平均水平的供给所造成的缺货损失。有时大量采购对价格会有折扣，或者利用季节性价格波动以较低的价格收购大量应市的货物等等，这也是需要库存的原因。但是库存量大将占用大量的资金，需大量的人力去管理，还会造成有些物品腐败变质，同时也要承受存货价格波动带来的风险。因此需要人们科学地组织库存管理，确定库存量的多少，何时补充库存，以及补充多少。

库存问题有供 — 存 — 销三个环节。通过订货 (或安排生产) 以及到货后的库存，最后由销售来满足顾客的需求。在这样的系统中，库存理论是解决如何控制订货时间的间隔及订货数量来调节系统的运行使得在某种准则下系统的性能达到最优。

(执笔：张汉勤　校阅：宋京生)

需求 [demand]　库存系统的输出。在一定时间内的需求 (销售) 量可以通过对历史数据的统计处理获得， 或者基于对市场销售量的调查与分析来获得。 需求量可以是一个常数，如自动生产线上一个工作日对某种零件的需求量； 也可以是非平稳的，如某地区一年四季生活用煤的需求量受季节性的波动。 需求也可以是随机的，如某种产品在一个月内的销售量。对需求量特征的掌握是制定合理的库存计划的重要前提。

(执笔：张汉勤　校阅：宋京生)

订货 [order]　对库存的商品补充供应。货物的不断补充是使得库存系统能够进行下去的输入。它可以通过订货或安排生产来获得。 影响库存系统运行的一个因素是订货与到货之间的时间滞后。 理想化的简单情形是瞬时交货。它是实际中供货或生产能力非常大时的一种近似。 通常地，滞后时间 (有时称交货时间) 考虑成常数或非负随机变量。 滞后因素使库存问题变得复杂化。

(执笔：张汉勤　校阅：宋京生)

库存策略 [inventory strategy]　给出何时补充库存以及补充多少的一个方案。而何时补充库存是依赖于库存盘点方式的，一类是连续盘点， 即库存管理者要实时监控库存，即对任何时刻 t，库存量都是已知；另一类是周期盘点，管理者只是按一定周期监控库存，即只有在时刻 nt $(n=0,1,\cdots)$ 库存量才知道，这里 t 称作周期。对于连续盘点，通常用的有三种策略。① 基点库存水平 s 策略，即当库存水平降到水平 s 之下，就立即发出一订单，其订货量是使订货时刻库存水平达到 s，这种策略的特征是需求和订货交替发生。② (r,Q) 策略，一旦库存水平小于 r，立即发出一订单，其订货量为常数 Q，若库存水平大于等于 r，则不订货，r 称作订货点库存水平。③ (s,S) 策略，一旦库存水平小于 s，立即发出订单，其订货量使得订货时刻的库存水平到达 S，否则就不予订货。对周期盘点也有类似的订货策略。

(执笔：张汉勤　校阅：宋京生)

EOQ 模型 [EOQ model]　一种非常简单的连续盘点单种货物的库存模型。特点是：订货和供货没有滞后 (即交货时间为零)，需求率为常数 D，不允许缺货，系统的费用包括订货费用和库存费用。若订 q 个单位产品，费用为 $K+cq$，库存中每单位产品库存费用为 r。采用 (s,S) 订货策略 (见*库存策略*)，目标为长期运行下单位时间中的平均费用为最小。最优的 (s,S) 为 $s^*=0, S^*=\sqrt{\dfrac{2DK}{cr}}$，最小单位时间平均

费用为 $cD+\sqrt{2crDK}$。

(执笔：张汉勤 校阅：宋京生)

报童问题 [newsvendor problem] 在库存模型中当商品的需求或交货时间 (从订货到交货的时间长度) 为随机时，称为随机库存模型。它又可分为周期盘点与连续盘点两大类。周期盘点又可分为单周期、多周期、无穷周期库存模型。顾名思义，单周期模型只有一个周期，决策者在周期开始有一次订货机会。而报童模型是典型的单周期模型。每天报童购入当日报纸，一天的需求量不能事先确定，但知道它服从某种分布。若购入量过少，则供不应求，收入有损失；若购入量过大，则过剩的报纸也造成损失。报童问题就是如何根据需求分布以及各种费用参数来决策购入量 (订货量)。假定费用包括订货费、存货费、缺货费。需求用 D 表示，其分布函数为 $F(\cdot)$。订货费为每订一份报纸费用为 c，存货费为每剩余一份报纸要付 h，缺货费为每缺一份报纸要付 $p(p>c)$。若订货量为 q，费用就为

$$cq+hE(q-D)^{+}+pE(D-q)^{+}。$$

现求 q 使得 $cq+hE(q-D)^{+}+pE(D-q)^{+}$ 为最小，知报童问题的解为 $q^{*}=F^{-1}\left(\dfrac{p-c}{p+h}\right)$。

(执笔：张汉勤 校阅：宋京生)

水库论 [dam theory] 为了防洪、灌溉、航运、发电等，经常需要建造一些水库来调节河水流量，并在雨季积蓄一些水量，以备旱季时使用。水库上游的水不断流入水库，水库又按一定泄放规则放水。如果调节得当，水库水位保持在安全理想的水平，则既能防洪，又能保证发电、航运与灌溉，否则可能影响生产，甚至造成灾害。因此如何正确掌握库容变化规律，了解水库何时会发生放空、溢流等现象就成为人们关心的问题。水库论就是来研究解决这些问题的。通常这类模型和某些排队模型完全等价，所以排队论是人们用来研究水库论的主要工具。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

库容 [content] 一个以时间为指标集的随机过程。它在时刻 t 处的值是水库在时刻 t 的存水量。我们考虑一个水库模型，输入过程是一个复合泊松过程，即在 $[0,t]$ 时间内水的流入量为 $\sum\limits_{i=1}^{A(t)}b_i$，其中 $\{A(t):t\geqslant 0\}$ 是一泊松过程，而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一独立同分布非负随机变量序列。假定水库的容量为无限，在相邻输入的时间间隔内若水库的库容为 x，水库的泄放速度就为 $r(x)$。用 $X(t)$ 来表示时刻 t 库容，则有

$$X(t)=X(0)+\sum_{i=1}^{A(t)}b_i-\int_0^t r(X(s))\mathrm{d}s。$$

此方程也叫库容方程。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

首次放空 [first emptiness] 指水库库容首次变为 0 的时刻。它相应于排队系统中服务台首次变成空闲的时刻。考虑一个容量有限 (容量为 K)，连续时间固定输出的水库模型。假定输入点是参数为 λ 的泊松过程，而每个输入点来水量为定量 1。假定水库只要不空，泄放就以单位速度进行。如果初始水库存量为 x，则水库在装满前首次放空时间的分布的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为

$$\begin{cases}1, & x=0,\\ c(s)\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\sum\limits_{i=0}^{N(x)}\dfrac{[(x-K+i)\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}]^i}{i!}, & x\neq 0,\\ 0, & x=K,\end{cases}$$

其中 $c(s)=\left[\sum\limits_{i=0}^{N(0)}\dfrac{[(i-K)\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}]}{i!}\right]^{-1}$，$K-x-1\leqslant N(x)<K-x$。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

莫兰水库模型 [Moran's model for the dam] 莫兰水库模型的容量为 K，且水的输入及排放仅仅发生在离散时刻点 $\{0,1,2,\cdots\}$ 处，且在时刻 n 处注入水的量为随机变量 A_n，若注入水量之后水库的库容水平超过 K，那么超出的部分自动溢出。时刻 n 的排放量也是随机的，记为 B_n。让 Q_n^A 表示恰巧是在第 n 次输入之前及第 $(n-1)$ 次排放之后的水库的库存水平。而 Q_n^B 表示恰巧是在第 n 次输入之后及第 n 次排放之前的水库的库存水平，则有

$$Q_n^A=[(Q_{n-1}^A+A_{n-1})\wedge K-B_{n-1}]^{+},$$
$$Q_n^B=([Q_{n-1}^B-B_{n-1}]^{+}+A_n)\wedge K。$$

利用随机游动理论可研究 Q_n^A 及 Q_n^B 的平稳分布。

(执笔：张汉勤 校阅：何启明)

供应链 [supply chain] 指从采购原材料，到制成中间产品及最终产品，然后将最终产品交付所需顾客，为完成这一系列任务的设施和分布选择形成的网络。它是由执行这一系列任务的一些企业、人员、技术、活动以及完成这一系列任务所需的信息和资源形成的一个系统，旨在将产品和服务递送给消费者。供应链的活动包括将自然资源、原材料、零部件转化为产品，归类、逐级分储，批发，分销，以及零售等若干环节。

供应链是物理流和信息流有机结合体。物理流是指物质转换、配送和存储，他们是供应链中最能明显看到的东西。但信息流使供应链的参与者能协调他们的长期计划， 能随供应链需求的波动来及时控制逐日的材料和货流。可见信息流同

样重要。

供应链和后勤学 (logistics) 这两个词汇常常会引起混淆。一般认为，后勤学应用于包含分销业务的公司和组织的内部活动。而供应链一词也覆盖了资源获取和制造、从而有更广泛的含义。换言之，一个供应链可由多个企业组成，包括了供应商、制造商和零售商，它们一起运作以满足顾客对产品和服务的需求。

供应链建立使人们更好的观察和了解公司间关系的动态变化，以往各个公司均只关注自己经营范围内的利润最大化，但对同一供应链内的其他经营者的利益几乎不了解也不关心。随着全球经济一体化，越来越多的企业意识到，企业间的竞争已经转化为供应链之间的竞争。

(执笔: 赵修利　校阅: 张汉勤)

供应链管理 [**supply chain management**]　供应链管理一词由波特 (M. E. Porter) 于 1985 年提出，表达了对从初始供应商到最终用户经历的关键企业过程中进行的控制和协调。成功地实施供应链管理导致在全球市场的一种新的竞争，这种竞争不再是公司与公司的竞争而是供应链与供应链的竞争。供应链管理的基本思想是，参与供应链的公司和社团以交换市场波动和生产能力的有关信息为己任。

供应链管理的目标是在满足客户需要的前提下，对整个供应链 (从供货商、制造商、分销商到消费者) 的各个环节进行综合管理，例如从采购、物料管理、生产、配送、营销到消费者的整个供应链的货物流、信息流和资金流，把物流与库存成本降到最小。供应链管理就是指对整个供应链系统进行计划、协调、运作、监控和优化的各种活动和过程，其目标是要将顾客所需的正确的产品能够在正确的时间、按照正确的数量、正确的质量和正确的状态送到正确的地点，并使总成本最小。

供应链管理的基本目的是通过最有效地利用资源，包括配送能力、存储设施及劳动力，来满足顾客的需求。理论上说，一个供应链要用最小的存储消耗使供应同需求匹配。优化一个供应链有许多方面，包括保持与供应商的联络以消除瓶颈；有战略眼光地在低价资源、库存费用和运输费用间取得平衡；实施"及时"(Just In Time) 技术优化制造流，在适当的地点保有一个适当的工厂和仓库的组合来满足顾客市场；利用最优厂址，最优分配、车辆路线分析、动态规划，也当然包括传统的后勤优化方法来极大提高配送系统的效率。

供应链管理作为一个战略概念，以相应的信息系统技术，将从原材料采购直到销售给最终用户的全部企业活动集成在一个无缝流程中。

(执笔: 赵修利　校阅: 张汉勤)

供应链网络 [**supply chain network**]　随着高新技术的迅猛发展，例如日益普及的无线和因特网、像 RFID 等互连的产品标记技术以及正在出现的利用全球定位号码来确定特定位置的应用标准，供应链正在快速演化为所谓的供应链网络。每个企业可以建构自己的供应链网络，它是一组物理地址、运输工具和一些支撑系统。通过供应链网络，企业可以更有效地向市场提供产品和服务。

供应链网络中的物理地址可以是制造工厂、存储仓库、运输码头、配送中心、机场，以及有关公司、供应商、运输系统、第三方后勤供应的互联运输节点，还包括零售商店以及终端客户。供应链网络中的运输模式是多种多样的，包括汽车、铁路货运、集装箱船或空运。

在供应链网络的管理和完善过程中，订单管理系统、仓库管理系统、运输管理系统、后勤系统战略模型、存储管理系统、补给系统、供应链网络可视化技术、最优化技术等得到大量应用。

正在发展的高科技如无线定位和超大规模集成 (GSI) 全球标准有可能使供应链网络以实时的模式自动化，这样将使供应链管理比以往更有效率。

(执笔: 赵修利　校阅: 张汉勤)

供应链竞争和协调 [**competition and cooperation**]　供应链管理的概念有两个核心理念。一是每个产品到达终端用户是许多企业的努力的集成；二是供应链中大部分企业往往只关注到局部利益。几乎没有企业致力于将产品送到最终用户的整个活动链。这导致系统各部分脱节而使供应链效率低下。称供应链中的各组成部分追求局部利益的现象为供应链竞争。而称集成管理供应链的所有活动使全链的客户价值最大化为供应链协调。这是链中所有成员的一个共同目标，它可以让供应链尽可能以最有效和最有效率的方式运行。一个协调的供应链，是指在共同遵守的某种契约下，当供应链中每一方致力于局部最优化的同时，整个链的效益也达到全局最优。供应链竞争分析要用的主要工具是对策论。

供应链常用的协调方式是协同规划、预测与补货 (collaborative planning, forecasting, and replenishment，CPFR)。CPFR 强调供应商及零售商的协同合作流程及资讯共享，并借由所共享的资讯适当补货以减少库存、物流及运输成本，使供应链的流程更有效率，进而提升供应链效益。

1986 年成立的北美跨产业商业标准 (Voluntary Interindustry Commerce Standards，VICS) 协会即致力于建立跨产业的商业标准以促进整体供应链运行效率。该协会发展包含上游供应商、成品供应商及零售商的协同方案的经营方针及准则，以整合供需的规划与执行。

(执笔: 赵修利　校阅: 张汉勤)

17.11 决策论 · 搜索论

决策论 [decision theory] 通俗地说，决策论是利用科学的理论和方法研究决策行为的数学理论。决策论主要是以经济学为基础，以定量分析的数学方法为基本工具，根据决策系统的状态信息和评价准则选择最优的应对策略。决策论是运筹学的一个分支，也是决策分析的理论基础。

制定决策时，人们往往是从诸多备选的决策方案中选取对决策者最为有利的方案实施。这涉及如何选取决策者的目标准则，决策者当前所面对的客观环境，各有效备选方案的确定以及这些有效方案实施后的评价等因素。因此，需要利用大量的定量分析工具来确定上面的诸多因素，即包括完全客观的判断、带有一定偏好的判断，也包括方案实施的确定性后果和不确定性后果的分析等等。由于这些因素在同一个决策问题中是联系在一起的，因此在决策分析中要分别考虑它们的影响。为进行决策分析，常利用主观概率和效用理论分别对后果的似然性判断以及决策者对后果的倾向性加以量化，然后用数学工具进行分析。常用数学方法有统计决策、对策论、动态规划、马尔可夫决策过程、决策模拟等，这些决策分析方法能为决策提供参考性依据。

(执笔：刘克 校阅：杨晓光)

决策模型 [decision model] 通常是指用于定量分析的数学理论模型。一方面，它要描述出整个决策过程的自然演化规律；另一方面，用数学理论刻画出来的决策模型要有有效的数学分析方法支持。

一个决策问题往往是非常复杂的，人们在建立决策模型的时候，必须要遵循以下的法则：首先要学会正确地提出问题。也就是说，要正确指出决策问题中的关键问题。且要以便于发现解答的方式列出问题。

其次要将问题进行抽象。抽象的过程首先是结合决策问题的经济规律运用一些有效的数学方法，集中并详细列出决策中的有利条件和不利条件。然后将这些条件按它们的共同点归纳成几个要点。第二步是将有共同特性的现象合并为一类，以每类为单位再次检查并问一下这一类提出了什么关键性问题。在寻找解决问题的办法之前，务必弄清问题产生的根源。这样，抽象过程能使我们看清关键问题并避免过分强调某一因素的重要性。一旦抽象过程结束，我们必须确定下一步能找到解决问题办法的正确方法 (决策行为的确定)。当解决问题的办法原则上确定后，留待完成的任务就是如何拟订详细的行动计划。这种从抽象逐步转化为具体的决策行为的特点是注重在关键性问题上寻找解决方法。

最后是关键问题图的运用。它的特点是将整个问题分解为两个或两个以上既相互排斥又互相补充的子问题，然后再对这些子问题重复进行分解的过程，直到最后分解出的各个子问题都能比较容易地得到解决为止。运用这种方法，即使原来看起来大得难以解决的问题，也能逐渐地分解为一系列较小的问题。这些问题是可以管理的，其结果也必须是可以确定和量度的。

综合上述三个部分就是一个决策模型。

(执笔：刘克 校阅：杨晓光)

决策过程 [decision process] 一般是指从提出决策目标到最终实施决策的一个过程。标准化决策过程中的基本步骤包含有：提出决策目标；确定合理的目标准则；建立决策模型；制定若干备选方案；比较备选方案；预测风险；估价风险 (可能性/严重性)；决策等等。在很多决策过程中，必须要考虑不确定因素的影响。此时在选择将来要付诸实施的行动的关键是，在这种情况下有没有充分依据的资料，用来比较各个备选方案的不同后果。如果没有，就无法确切知道选择的方案将会产生什么后果。因此，这就要求决策人员要审度多种选择，坚定信心，查清 X 方案比 Y 或 Z 方案是否更符合提出的目标。应该说，这是一个极为复杂的过程。

除了从标准化的角度考虑决策过程以外，人们还将决策过程分为：双重决策过程；多方案型决策过程；创新型决策过程；序贯决策过程; 方案标准最优化方法等各种不同类型的决策过程。

(执笔：刘克 校阅：杨晓光)

确定性策略 [deterministic policy] 策略空间中的一种特殊策略。其特殊性表现在一个确定性策略

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$$

的每一个决策规则 $\pi_t(\cdot|h_t)$ 都是行动集合 $A(i_t)$ 上的一个退化分布，也就是说对所有的决策时刻 t 和历史轨迹 h_t，$\pi_t(\cdot|h_t)$ 以概率 1 选择 $A(i_t)$ 中的一个元素，即此时只选择一个决策行为。一般来说这个被选择的行为依然依赖于决策过程的历史 h_t 和决策时刻 t。如果此时每一个决策规则 $\pi_t(\cdot|h_t)$ 还只依赖于历史 h_t 的最后一个状态 i_t，它就是一个确定马尔可夫策略(策略 π 的符号定义参考策略空间)。

所有的确定性策略称为确定性策略类。

(执笔：刘克 校阅：杨晓光)

决策 [decision; decision making] 决策有两个含义：一个是决策 (decision)，表示决策者在不同的决策状态上可以采用的行动、行为、措施或者方案等。在描述决策系统的每一个状态上，决策者都有很多决策行动可以选择，把在这个状态上所有可能被选择的行动放在一起，就构成了这个状态的决策集合，也称为行动集。如果在系统的一个状态上从它的行动集中选定一个决策并实施之后，会产生相应的决策效果，会影响决策者的收益、费用和决策系统将来的发展 (系统未来

状态的变化) 等。另一个含义是制定决策 (decision making)，即在全面考虑决策效果的条件下选择决策的过程，这其实就是制定决策的过程，可以参考决策过程。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

n 步决策 [n-stage decision]　n 步决策有两层含义，一个是指第 n 步的决策，除了特指它是第 n 步的决策以外，它与决策没有本质的区别。另外一个是指从第 1 步到第 n 步的决策，也就是一个策略 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$ 的前 n 个决策规则，即 $(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{n-1})$(策略 π 的符号解释见策略空间)。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

决策树 [decision tree]　决策分析的一种直观知识表示方法。亦称决策树法。决策树法是根据逻辑关系将决策问题绘制成一个树型图，按照从树根到树梢的顺序，描述了逐步决策的各种后果，再通过树梢到树根逐步计算各结点的期望值，最后根据这些期望值构成的准则进行决策的方法。

一般来说，树上的分枝处被称为节点，决策树通常有三类节点：决策点、机会点和后果点。决策树的根节点是一个决策节点。在这个决策节点上，决策者有一些有效的决策可以选择，这些决策构成了这个根节点的不同分枝。选定一个决策就是选定树上的一个分枝，到达机会节点。由于决策效果的不确定性会造成不同的后果，在机会节点上的分枝个数就是后果的个数。此时，还要在每个机会节点到后果节点的分枝上标出相应后果发生的机会值 (主观概率、客观概率或者其他类型的权重值)，并且计算每一个后果节点的后果值标在后果点上。因此，做决策的过程就可以形象的看成从根节点走到一个后果节点的过程。对于单步决策问题，决策树的构成就结束了。对于序贯决策来说，还要以这些后果点为下一步的决策点，以在这些决策点上的决策为后面的分枝， 继续进行下去直到决策过程结束。需要注意的是，序贯决策的后果值会分为两部分，一部分是与后面的决策过程无关的， 一类是相关的。这时，在后果点上只标出与后面决策无关的部分。因此，决策树的构造是描述了整个决策过程各种 (按照先后顺序) 可能发生的情况、发生的机会和造成后果的一些影响。

决策树构成之后，就要根据决策的不同效果制订最好的决策了。 这是一个从后向前的计算过程，也可以说是一个从树梢到树根的计算过程。具体来说：从最后节点的后果值倒推出上一级节点的最佳决策值，并将其与上一级节点的后果值相加。把这个加和赋为该级节点的后果值后，重复上面的过程。一直进行到决策树的根节点，就得到了决策问题的最佳策略值了。在记录每一个决策点的最佳决策后，也就得到了最佳策略。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

决策表 [decision table]　用表格的方式描述决策问题一种方法，这种表格也被称为决策矩阵。所谓决策表是指一个以行、列形式来描述和表示决策规则和知识信息的表。如果决策问题的后果是用损失的费用表示，这个表也被称为损失矩阵。

决策表的一般表示如下表。

决策表的一般形式

行动 \ 状态	θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_j	$\cdots$	θ_n
a_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}

在决策表中，a_i 表示可供选择的决策行为，$i=1,2,\cdots,m$；θ_j 表示决策行为实施之后的自然状态，$j=1,2,\cdots,n$；而 x_{ij} 表示实施选择决策 a_i 后，自然状态是 θ_j 的决策后果。人们有时喜欢使用这个矩阵的转置形式。

上述的决策表可以更加一般化，一方面，决策结果的自然状态可能是无限的、具有一定的相容性或者不可直接观察性等等变化；另一方面，决策后果可能具有更加一般的信息含义，例如：用效用函数衡量，而后果的出现并不单单是以概率方式描述，具有更为一般的不确定性性质等等。具体的使用，可以根据实际情况加以灵活运用。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

马尔可夫决策过程 [Markov decision process]　一个抽象的决策模型，是基于马尔可夫过程理论的随机动态系统的最优决策过程，亦称马尔可夫决策规划(Markov decision programming)、受控马尔可夫链(controlled Markov chain)。马尔可夫决策过程是序贯决策的主要研究领域。它是马尔可夫过程与确定性的动态规划相结合的产物，故又称马尔可夫型随机动态规划，属于运筹学中数学规划的一个分支。

马尔可夫决策过程是指决策者周期地或连续地观察具有马尔可夫性的随机动态系统，序贯地作出决策。即根据每个时刻观察到的状态，从可用的行动集合中选用一个行动作出决策，系统下一步 (未来) 的状态是随机的，并且其状态转移概率具有马尔可夫性。决策者根据新观察到的状态，再作新的决策，依此反复地进行。

马尔可夫决策过程可用如下五元组来描述：$\{S,(A(i),i\in S),q,r,V\}$。其中 S 是系统的状态空间，$A(i)$ 是系统处于状态 $i(\in S)$ 的可用行动 (措施，控制) 集；V 是衡量策略优劣的指标 (准则)。在时间离散的问题中，q 是时齐的马尔可夫转移律族，族的参数是可用的行动；r 是定义在集合 $\Gamma(\Gamma=\{(i,a)|a\in A(i),i\in S\}$ 上的单值实函数，而 $r(i,a)$ 表示在状态 i 采用行动 a 的一步期望报酬或费用。在时间连续的问

题中, q 是时齐的马尔可夫转移速率族，族的参数是可用的行动；r 是定义在集合 $\Gamma(\Gamma=\{(i,a)|a\in A(i),i\in S\}$ 上的单值实函数, 而 $r(i,a)$ 表示在状态 i 采用行动 a 的期望报酬率或费用率。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

报酬函数 [reward function]　定义在决策系统的状态空间和相应决策集合的乘积空间到实数集上的一个映射。它描述了在每一个状态上选择可用的行动 (决策) 之后，为决策者带来的报酬或者费用。取值为正表示报酬收益，取值为负表示费用支出。有时为了方便，只考虑费用支出情况，此时也称为费用函数(cost function)。

不同的决策问题，报酬函数有不同的经济解释。例如，在考虑运输路径问题的决策过程中，报酬函数值表示选择一条路径后，在这条路径上的运费和利润之和；在考虑库存问题的决策过程中，报酬函数值表示选择一个订货决策之后，由订货费用、库存持有费用、缺货损失费用和销售利益之和的期望收益或者损失。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

平稳策略 [stationary policy]　马尔可夫策略类中的一种特殊策略。其特殊性表现在每一个决策规则 $\pi_t(\cdot|h_t)$ 都是行动集合 $A(i_t)$ 上的一个概率分布，但是它仅依赖于历史轨迹 h_t 中的最后一个状态 i_t，并不依赖决策时刻 t，即 $\pi_t(\cdot|h_t)=\pi_0(\cdot|i_t)$，也就是说决策规则具有平稳的性质。这样的策略可以方便的记为 $\pi=(\pi_0,\pi_0,\cdots)$ 或者 π_0^∞。有时为了区别，这种策略也被称为随机平稳策略；而当 $\pi_0(\cdot|i_t)$ 对所有的状态 i_t 都是退化分布的时候，策略被称为确定平稳策略或者简称为平稳策略。对于确定平稳策略来说，每一个状态都唯一的对应了一个该状态上的可用行动，这个对应人们常用一个函数 f 来记，所以确定平稳策略可以用更为简便的符号 f^∞ 甚至直接用 f 来记述 (策略 π 的符号解释见策略空间)。

所有的平稳策略称为平稳策略类。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

马尔可夫策略 [Markov policy]　策略空间中的一种特殊策略。其特殊性表现在每一个决策规则 $\pi_t(\cdot|h_t)$ 都是行动集合 $A(i_t)$ 上的一个概率分布，但是它仅依赖于决策时刻 t 和历史轨迹 h_t 中的最后一个状态 i_t，即 $\pi_t(\cdot|h_t)=\pi_t(\cdot|i_t)$，也就是说决策规则具有马尔可夫性质。有时为了区别，这种策略也被称为随机马尔可夫策略；而当 $\pi_t(\cdot|i_t)$ 对所有的决策时刻 t 和状态 i_t 都是退化分布的时候，策略被称为确定马尔可夫策略或者简称马氏策略 (策略 π 的符号解释见策略空间)。

所有的马尔可夫策略称为马尔可夫策略类。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

ϵ 最优策略[ϵ-optimal policy]　在选定决策过程的目标准则、需要考虑的策略空间和预先给定的一个 $\epsilon>0$ 之后，ϵ 最优策略就是这样的一个策略，它所对应的决策准则值函数与准则值函数在这个策略空间上的上 (下) 界相差不超过 ϵ。如果 $\epsilon=0$，这个策略也称为最优策略。

我们以有限阶段的目标准则为例说明。对给定的一个 $\epsilon>0$，如果存在一个策略 $\pi^*\in\Pi$(这里 Π 表示一个策略空间或策略类)，满足：

$$V_N(i,\pi^*)+\epsilon\geqslant\sup_{\pi\in\Pi}V_N(i,\pi),\qquad \text{对一切}\ \ i\in S,$$

那么，策略 π^* 就是关于准则 V_N 在策略类 Π 上的一个 ϵ 最优策略。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

策略空间 [policy space]　根据决策问题的不同，策略 (policy) 的定义是不一样的。对于只做一次决策的决策问题来说，策略和决策的定义没有什么区别，对于序贯决策和马尔可夫决策过程来说，策略要告诉决策者在任何一个时刻，系统处于任何一个状态时决策者应该如何选择决策。因此，策略是一个复杂的决策规则序列。以时间离散的决策问题为例，一个策略 π 可以描述为决策规则序列 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$，其中省略号表示直到决策过程结束 (可以有限，也可以到无穷)。这里的 π_t 表示在时刻 t 决策者选择决策行为的规则。具体地说，决策过程从开始进行到时刻 t 时，系统的状态可能是状态空间 S 中的任何一个，我们记为 $i_t\in S$，我们用 $h_t=i_0,a_0,i_1,a_1,\cdots,i_{t-1},a_{t-1},i_t$ 表示从决策过程开始直到时刻 t 的一个历史轨迹，其中 $i_0,i_1,\cdots,i_t\in S$ 是前 $t+1$ 个时刻的状态，$a_0,a_1,\cdots,a_{t-1}$ 是前 t 个时刻分别选取的决策行为，那么 $\pi_t(\cdot|h_t)$ 是行动集合 $A(i_t)$ 上的一个概率分布，也就是指导这时选择决策行为一个规则。

将所有的策略放到一起，就是策略空间。策略空间还可以根据包含的策略类别分为许多种，例如：马尔可夫策略空间 (类)、平稳策略空间 (类) 或者确定性平稳策略空间 (类) 等。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

目标准则 [criterion]　评价决策或者策略优劣的标准。根据决策者的不同需要，常用的目标准则有：有限阶段准则、折扣准则、平均准则、总报酬准则、权重准则等。

在选定一个策略 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$ 之后，有限阶段准则的定义就是：

$$V_N(i,\pi)=\sum_{t=0}^{N-1}E_\pi^i[r(Y_t,\Delta_t)]+E_\pi^i[r(Y_N)],$$

其中 N 是预先确定好的决策周期长度；i 是初始系统出发的状态；Y_t 和 Δ_t 分别表示系统按照策略 π 运行到时刻 t 的系统状态和采用的决策行为；r 是报酬函数；E_π^i 是条件数学期望。

折扣准则的定义是：

$$V_\beta(i,\pi)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_\pi^i[r(Y_t,\Delta_t)],$$

其中 $\beta\in(0,1)$ 是折扣因子。

平均准则的定义是：

$$\bar V(i,\pi)=\liminf_{N\to\infty}\frac{V_N(i,\pi)}{N+1}。$$

总报酬准则的定义是：

$$V(i,\pi)=\sum_{t=0}^{\infty}E_\pi^i[r(Y_t,\Delta_t)]。$$

权重准则的定义是：

$$w(i,\pi)=\lambda(1-\beta)V_\beta(i,\pi)+(1-\lambda)\bar V(i,\pi),$$

这里 $\lambda\in[0,1]$ 是权重因子。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

效用理论 **[utility theory]**　决策者进行决策方案选择时采用的一种理论。决策往往受决策者主观意识的影响，决策者在决策时要对所处的环境和未来的发展予以展望，对可能产生的利益和损失作出反应。在公理科学中，把决策人这种对于利益和损失的独特看法、感觉、反应或兴趣，称为效用。效用实际上反映了决策者对于风险的态度。高风险一般伴随着高收益。对待数个方案，不同的决策者采取不同的态度和抉择。

运用心理测定方法，可以测量出决策者对于各种收益和损失的效用值，并画出相应的效用曲线得到效用函数，利用效用函数可以分析上面提出来的问题。

效用理论分为基数效用论和序数效用论。基数效用函数不仅能反映决策人对后果的偏好次序，还能反映出决策者对偏好的强度，例如：投入产出的效果分析等等。而序数效用函数只反映决策者对后果的偏好次序，并不反映其偏好强度，例如：体育比赛的名次排列等等。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

效用函数 **[utility function]**　基数效用函数的定义是：在预期集合 P 上的一个实值函数 u，如果它和 P 上的优先关系 $\succcurlyeq$ 一致，即若 $P_1,P_2\in P$，

$$P_1\succcurlyeq P_2\ \text{当且仅当}\ u(P_1)\geqslant u(P_2),$$

则称 u 是效用函数。

效用函数定义里的预期 (也称为展望) 集合是指决策的所有可能的预期，即各种后果及后果可能出现的概率的组合。如果决策后的可能状态有 n 个，所有决策的集合是 A，选择决策 a 后相应状态发生的概率和在各状态上的后果值分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，那么预期集合就是：$P=\{(p_1(a),c_1(a);p_2(a),c_2(a);\cdots;p_n(a),c_n(a))|a\in A\}$。预期集合上的优先关系 $\succcurlyeq$ 是预期集合上的一个弱序，它满足：①连通性 (即 $\forall a,b\in A$，$a\succcurlyeq b$ 或者 $b\succcurlyeq a$ 或者两者都成立)；②传递性 ($a,b,c\in A$，如果 $a\succcurlyeq b$ 且 $b\succcurlyeq c$，则 $a\succcurlyeq c$)；③与等价性 ($\sim$) 一致 ($a\sim b$ 当且仅当 $a\succcurlyeq b$ 且 $b\succcurlyeq a$)。

从效用函数的定义可以看出它的存在性本身就是问题。冯•诺依曼 (von Neumann) 和莫根施特恩 (Morgenstern) 在 1944 年给出了预期集合 P 上的效用存在性公理，也被称为理性行为公理。

<u>理性行为公理</u>(axiom of rational behavior)：①连通性，又称可比性；②传递性；③替代性 ($P_1,P_2,P_3\in P$，$P_1\succ P_2$ 且 $0<\alpha<1$，则必有 $\alpha P_1+(1-\alpha)P_3\succ\alpha P_2+(1-\alpha)P_3$)；④连续性 (也称偏好有界性)。其中关系 $P_1\succ P_2$ 表示 $P_1\succcurlyeq P_2$ 但是 $P_2\succcurlyeq P_1$ 不成立。

公理的第一条说明决策人能够判定 P 中的任何两个元素的优劣关系。第一条和第二条合称为次序性公理，满足次序性公理的集合是一个全序集合，也就是决策人可以将 P 中的全部元素依其偏好排列优先次序。第三条说明两个有序的预期各有相同的比例 $1-\alpha$ 部分被 $(1-\alpha)P_3$ 替代后，优先关系不变。最后一条表示没有无穷好或者无穷差的报酬或者费用。

因此，关于效用函数有下面的重要结论：如果预期集合 P 上的优先关系 $\succ$ 满足理性行为公理的条件，那么必然存在与优先关系 $\succ$ 一致的效用函数 u，而且效用函数 u 在正线性变换下唯一。

效用函数也可以直接定义在后果集上，之所以定义在预期集合上是因为能够反映出决策人对风险的态度。

序数效用函数与基数效用函数的区别在于注重每两个预期的排序而不是它们之间排序的差值，因为此时的差值没有任何实在的意义，所以序数效用函数常常定义在后果集合 C 上。序数效用函数的存在性也有相应的理性行为公理保证。即：① C 上的连通性；②C 上的传递性；③ C 上的连续性 (对任何确定性后果 c，它的劣势集和优势集都是闭的)。

(执笔：刘克　校阅：杨晓光)

序贯决策 **[sequential decision]**　亦称序列决策, 它是一个多阶段决策的过程。在时刻 t, 控制系统的决策者首先观察到系统当前所处的状态, 系统的状态为决策者提供了选取行动的一切必要信息, 其中包括在这个状态上的有效的行动集合。然后根据这个状态决策者选取一个行动。作为选取行动的结果, 有两件事情发生: 一个是为决策者产生了一个即得的报酬或费用; 而另一个是系统的状态会按照与这个行动有关的一个概率规律在下个阶段即在 $t+1$ 时刻转移到一个

新的状态, 当然报酬和转移概率都是依赖于当时的状态和在这个状态上决策者选取的行动的。这时决策者面临着与开始时相同的问题, 即选取 $t+1$ 时刻的决策。这个过程随着时间的推移循环下去, 直到决策过程结束。通过上述决策过程, 决策者可以得到一个报酬序列和一连串的状态变化, 而评判这些决策行为所导致的报酬序列的就是准则。

我们可以把这个序列决策过程的关键列举出来: ① 所有的决策时刻点集; ② 系统的所有可能的状态集合; ③ 可以采用的全体行动集合; ④ 与状态和行动相关连的既得报酬或费用集合; ⑤ 与状态和行动相关连的转移概率的集合; ⑥ 评判策略优劣的评判准则等等。一般来说，总认为决策者在开始做决策的时候这些量已经设定了。

(执笔: 刘克 校阅: 杨晓光)

不确定决策 [decision under uncertainty] 人们在不确定的决策环境下如何做出合理的*决策*的问题，叫做不确定决策问题。研究不确定决策问题的理论和方法的科学称为不确定决策。形成不确定环境的原因有多种，如客观事物的复杂性，信息的不完全性，人们对现实问题认识的不精确性等等。这些不确定性的表现形式也多种多样，如随机性、模糊性、粗糙性、灰色性等。随机性决策问题、模糊决策问题、基于粗糙集的决策问题、灰色决策问题都是不确定决策问题的例子，研究它们的理论基础分别是概率论、模糊集理论、粗糙集理论和灰色理论。当今，不确定决策已经成为现代决策科学和运筹学领域中的新的研究课题之一，它的理论和方法是处理现实世界中复杂的不确定性决策问题的有力工具。

(执笔: 张强 校阅: 刘克)

风险决策 [decision under risk] 针对自然状态发生概率完全不可知的未来事件的*不确定决策*，风险决策是指虽然不能确定未来事件的自然状态哪种会发生，但是其发生概率为已知的决策。该种类型决策需要满足以下五个条件:

(1) 存在明确的决策目标;

(2) 存在可供决策者选择的两个或两个以上的行动方案;

(3) 存在不以决策者意志为转移的两种或两种以上未来事件的自然状态;

(4) 每种自然状态下采取不同行动方案的损益值可以计算;

(5) 可以推断各种自然状态发生的概率。

风险决策的常用方法有最大可能性法、期望值法和*决策树*法等:

最大可能性法以概率论为基础，认为在多个随机的自然状态中概率最大的最有可能发生，从而选取发生概率最大的自然状态，继而将风险决策问题转化为确定决策问题来处理。

期望值法以目标函数的数学期望为基础，将各个不同行动方案在各个自然状态下的期望收益值进行比较，选择最大的期望收益值对应的方案为最优方案。

决策树法是用一种描述各个行动方案在未来可能出现的各种状态下的损益情况的树形图来求解决策问题，它借助若干个节点和分支形象地描述了这些方案、可能出现的状态及其概率、各方案在各种状态下的收益值等信息。它更适用于多阶段风险决策问题。

必须指出，对于同一个决策目标，运用不同的决策方法可能得到不同的结果。

(执笔: 张强 校阅: 刘克)

递阶决策 [hierarchical decision] 递阶决策是用于解决具有层次特征的大规模、复杂决策问题的工具，这类决策问题一般具有多个可分为若干层的决策属性或决策者。

对属性分层的决策问题是将决策属性分为树状或网状递阶层次结构进行决策的。如*层次分析法*将决策属性分为目标层 —— 预定目标或理想结果层; 准则层 —— 包括为实现目标所要考虑的准则和子准则; 方案层 —— 实现目标可供选择的各项措施、决策或方案。

对决策者分层的决策问题是将决策者分为上下层关系，决策中各层都有相对独立的决策者，他们的决策一般都会互相影响。决策中上层决策者总揽全局起协调作用，下层是在上层决策限制下独立决策，使子系统的利益达到最大。其决策机制是: 首先，上层决策者向下层决策者宣布决策，该决策直接影响下层决策者的可行集和目标函数，下层决策者在该限制下将自己的最优决策反应给上层决策者。下层决策者的决策也影响上层决策者的目标函数和可行性，上层决策者再调整他的决策，直到各决策者均得到可接受的满意解为止。这类问题一般称为主从递阶决策问题，又称为 Stackelberg 问题。

(执笔: 张强 校阅: 刘克)

群决策 [group decision] 由多个人组成一个群体，对某类需要选优的问题作出*决策*称为群决策，或称多人决策、团体决策、集体选择 (collective choice)。民主选举、全民公决、文体竞赛、方案择优、职称评定、陪审团定罪量刑以及联合国提案表决等等，都是群决策问题的例子。

一个群决策问题通常包含三个要素: ① 不少于两位参与决策的成员; ② 不少于两个供选择的对象; ③ 有一个适当的决策规则。一般地，群体中的每个成员都有各自的偏好: 有时成员偏好完全一致，有时成员偏好相互对立，大多数情况是群体中各成员的优先偏好既有一致又有矛盾。因此，群决策要研究的基本问题是如何集结群体中每个成员的偏好以形成群的偏好，然后根据群体的偏好，在一个适当的规则下对备选方案进行优先排序，从而选择群体最优的方案。

群决策的规则有多种，其中简单多数规则是群决策中应

用最为普遍的一个群体决策规则。但是，简单多数规则并不是可以无条件地随意使用的。早在 1785 年，法国社会学家孔多塞 (Condorcet) 就发现，用多数规则投票，可以导致被选方案循环排序的现象。如在两两比较方案 A、B、C 时，可能出现方案 A 优于方案 B；方案 B 优于方案 C；方案 C 又优于方案 A 的情形。这种现象被人们称为投票悖论(paradox of voting)或称孔多塞悖论(Condorcet's paradox)。既然多数规则可能会导致不确定的投票结果，那么是否存在一种合乎理性的群体决策规则，可以消除这种投票悖论呢？1951 年，美国斯坦福大学教授阿罗 (K. J. Arrow) 等在《社会选择与个人价值》一书中提出了著名的“阿罗不可能定理”，对这个问题做出了否定的答复。该定理证明了社会选择并不能在完全符合理性的条件下通过排序的方式将个人偏好集结为群偏好。

群决策的研究领域很广泛，有投票表决 (选举) 体制，社会选择理论 (社会选择函数、社会福利函数)，委员会理论，队论 (team theory) 与分散决策，递阶优化，专家评估，一般均衡理论，组织机构决策等等。此外，还有另一大类研究领域是群中成员追求自身的利益和与其他人对立的价值，即群中成员间存在利益冲突的对策 (或称博弈) 问题，这些属于对策论研究的范围。

(执笔：张强　校阅：刘克)

交互决策 [**interactive decision making**]　在决策过程中，特别是在多目标决策过程中，决策分析人员采取灵活的对话方式，与决策者逐步交流，根据获取的决策者的偏好信息即偏好结构，反复修改决策的解，直到获得决策者满意的解，或决策者对当前的解不再提出进一步的意见为止的决策过程称为交互决策。

通常，在决策过程中，决策者对各个目标的设定以及目标的取值范围的认识是随着决策过程的深入而逐步深化和明确的，在决策分析之前，决策者并不能确定地给出各目标间的层次，权重或理想点。为了更加客观的反映决策者的真实偏好，决策分析人员将多目标问题转换成多阶段求解问题，每一阶段求解完成后与决策者进行沟通，根据决策者的偏好，调整各个目标及目标的取值范围，以实现决策者在可行域内根据自己对资源分配及目标认识的价值观，选择更加满足决策者偏好的最优解。这种方法可以结合多目标求解方法，在求解过程中不断将决策者的反馈意见引入模型，实现与决策者动态地交换信息。

求解交互决策问题的一般步骤是：

(1) 决策分析人员根据初始参数集求解问题，以获得一个可行的、最好是非劣的解；

(2) 决策分析人员与决策者交流，获取决策者对上述解的意见；

(3) 根据决策者的意见，修改参数集，构造新问题的解。重复上述步骤，直到获得决策者满意的解，或决策者对当前的解不再提出进一步的意见为止。

交互决策方法主要包括：折衷法，切比雪夫方法，阶段法，梯度法等。

(执笔：张强　校阅：刘克)

多目标决策 [**multiple criteria decision making**] 当一个决策问题所涉及的目标多于一个时，这样的决策问题就被称为多目标决策问题。多目标决策是 20 世纪 70 年代发展起来的运筹学的一个分支，它与单目标决策问题有所不同。在多目标决策问题中，多个目标的计量单位或衡量标准往往是不一致的，即目标的不可公度性(non-commensurable)，因而难以进行比较；有些目标甚至是相互矛盾的，从而导致了多目标决策问题求解的困难。一般很难使每个目标都达到最优。因此，多目标决策实质上是在各种目标之间和各种限制之间求得某种合理的妥协，不一定最优，满意既可，这也是多目标最优化的过程。

根据决策问题中备选方案的数量，多目标决策问题被划分为有限方案多目标决策问题(multi-objective decision making problems with finite alternative)，即多属性决策问题(multi-attribute decision making problems)和无限 (连续) 方案多目标决策问题(multi-objective decision making problems with infinite alternative)，即 (狭义的) 多目标决策问题两大类。一些学者也将多属性决策问题和 (狭义的) 多目标决策问题统称为多准则决策问题 (multiple criteria decision making problems)。

一个多目标决策问题通常包含以下四个要素：

(1) 方案集 X，它是决策变量 x 的集合，一般，x 是一 n 维向量，一个方案完全由 x 的值来表示。

(2) 目标集(set of objectives)或属性集(set of attributes) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$，用来计算方案 x 的目标函数或属性评价值。

(3) 决策形势(decision situation)，用来说明决策问题的结构和决策环境。

(4) 决策规则(decision rule)，用来决定备选方案的取舍，可分为最优化 (optimizing) 规则和满意 (satisfying) 规则两类。

一个多目标决策问题可以简捷地表示成形式：求解

$$\underset{x\in X}{DR}\left[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right],$$

其中，DR 表示决策规则。上式可解释为，运用决策规则 DR，按照指标 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的值，在方案集 X 中选择一个“最好的”方案。

在多属性决策问题中，X 是有限方案集，x_i 表示第 i 个方案，f_j 为方案的第 j 个属性，$f_j(x_i)$ 表示第 i 个方案 x_i 关

于第 j 个属性 f_j 的属性值。这时决策问题的简捷形式为：求解

$$\underset{x_i\in X}{DR}\left[f_1(x_i), f_2(x_i), \cdots, f_n(x_i)\right]。$$

求解多目标决策问题的方法有很多种，如化多目标为单目标法、分层序列法、直接求非劣解法、*目标规划法*、多属性效用法、*层次分析法*、重排次序法等。多目标决策方法现已广泛地应用于数理、经济、管理、人文、工程等领域。

(执笔：张强　校阅：刘克)

风险 **[risk]**　风险的含义很广，风险的概念出现在经济、金融、社会和生产管理等人类活动之中，涉及自然科学和社会科学中的诸多学科，是一个多学科的研究领域。一般而言，风险就是对未来收益的不确定性的一种度量。经典意义下的风险，总是与遭受损失、损害或者危险的可能性相联系。但在现代意义之下，风险不仅可能导致损失和损害，而且也可能带来收益。在数学上，风险一般用一个与概率有关的数值来度量。常用的风险度量有收益率的标准差、在险价值(value at risk，即在一段时间之内在给定的置信水平之下的最大期望损失值)，等等。

风险可根据其产生的原因、考察的对象、作用的范围等诸多方面进行分类，如按照原因可以划分为自然风险、社会风险、经济风险、技术风险等；按照考察的对象可以划分为市场风险、信用风险、操作风险、流动性风险、汇率风险、购买力风险、经营风险、关联风险等；此外还有道德风险、政治风险、国家风险、法律风险等等。对风险的分析，一般也是从引起的原因、影响的对象、发生的可能性、造成的损失或带来的收益的程度等方面进行。

风险在现代金融学和金融管理中居核心地位。风险识别、风险度量、风险管理以及基于风险的业绩评估是金融学的核心内容，而风险定价和投资组合的优化则是金融数学的主要内容，马科维茨 (Markowitz) 的均值–方差资产组合模型、夏普–林特纳–莫辛 (Sharpe-Lintner-Mossin) 的资本资产定价模型、罗斯 (Ross) 的套利定价理论、布莱克–斯科尔斯–默顿 (Black-Scholes-Merton) 的期权定价理论，都是围绕着风险和收益而开展的。这其中，马科维茨、默顿、夏普、斯科尔斯都获得了诺贝尔经济学奖。

(执笔：杨晓光　校阅：刘克)

搜索论 **[search theory]**　寻找并发现不明目标的理论和方法，军事运筹学的重要分枝之一。在战争和人类其他活动中，决策者经常会遇到搜索敌人的潜艇、失事的飞机、失踪的人员等事件。另外，病情诊断、故障排除、探矿等也均可归结为搜索问题。抽象的说，搜索问题有三个要素：

(1) 目标位置的概率分布和运动的信息。搜索对象，亦称搜索的目标。在搜索中，通常人们需要了解目标某个初始位置的概率分布、其后继运动的方向以及速度等有关信息，才能进行有效的搜索。如果对于目标位置和运动的信息一无所知，搜索目标将会失败。目标位置信息丢失后，主要根据目标信息最后报告，在后继运动中，要根据其任务、环境、可能采取的措施等，具体情况具体分析，以得到搜索的结果。

(2) 发现函数。即在给定区域内有目标的条件下，发现目标的概率和投入的搜索力量的关系。发现函数和搜索中使用的器材、搜索方式、方法有关。在给定的条件下，某区域内存在目标，使用给定的器材，并不一定能发现目标。所以，这是一个概率问题。

(3) 力量约束。通常，投入搜索的力量或资源总是有限的。比如，总共有时间 T 可用于搜索，则时间 T 就是一种资源(力量)。对搜索时间的限制，就是约束。

搜索论的基本问题是，在给定的发现函数和目标位置分布的条件下，找出搜索力量在时间和空间的分配方案，使发现目标的概率最大。

(执笔：徐瑞恩　校阅：刘克)

随机搜索 **[random search]**　一种以均匀随机方式寻找目标的方法。一般设搜索区域是面积为 A 的长方形，满足三个条件：目标分布在长方形内是均匀分布；传感器在长方形内的运动路线是随机的，也是均匀分布的；长方形外不搜索。设有一传感器，在 A 内去搜索一目标。此传感器发现目标的距离为 R；即目标和传感器的横截距离 $r \leqslant R$ 时，发现目标的概率为 1；$r > R$ 时，发现目标的概率为 0。此传感器的扫描宽度为 $W = 2R$。在一面积为 A 的区域内，以系统的方式，并以速度 v 搜索，在时间 t 内发现目标的概率是

$$b(t) = 1 - \mathrm{e}^{-Wt/A}。$$

此公式被称为库普曼 (Koopman) 随机搜索公式，它是一个较为准确的、保守估计的发现概率公式。

(执笔：徐瑞恩　校阅：刘克)

搜索运动学 **[kinematics of search]**　描述观察者与目标运动方向和它们的相对位置的技术。用向量描述相对运动和位置，

$\boldsymbol{v}$：搜索者速度；

$\boldsymbol{u}$：目标速度；

$\boldsymbol{w}$：目标相对搜索者速度 (简称相对速度向量)。

以上三者有关系：$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$。搜索者速度向量与目标速度向量的角度 (顺时针计)，称之为跟踪角 ϕ；搜索者速度向量与相对速度向量的角度 (顺时针计)，称之为跟踪角 θ。搜索者到目标的距离向量记为 $\boldsymbol{r}$。搜索者运动方向与 r 的角度，记为 β。通过这些基本概念，来研究搜索者和目标相对位置，考虑遭遇的可能性。

(执笔：徐瑞恩　校阅：刘克)

17.12 其他运筹学方法

数据包络分析 [data envelopment analysis (DEA)] 1978 年由查尼斯 (Charnes)、库珀 (Cooper)、罗得斯 (Rhodes) 提出，是以相对效率概念为基础，根据多指标投入 (输入) 和多指标产出 (输出)，对同类型的部门或单位进行相对有效性或效益评价的一种方法。其中被评价的部门或单位称为决策单元 (decision-making unit, DMU)，即通过消耗一定数量的生产要素并产出一定数量的“产品”的部门或单位。

数据包络分析 (DEA) 根据一组关于输入–输出的观察值来估计有效生产前沿面。DEA 最基本的模型被命名为 CCR 模型，由查尼斯 (Charnes)、库珀 (Cooper)、罗得斯 (Rhodes) 于 1978 年提出。它是一个分式规划，通过查尼斯–库珀变换，可将其化为等价的线性规划，又由线性规划的对偶理论可实现对 DEA 有效性的计算。

(执笔：崔晋川　校阅：章祥荪)

层次分析法 [analytic hierarchy process (AHP)] 一种定性和定量相结合的、系统化的、层次化的多准则决策方法。该方法是美国运筹学家萨蒂 (T. L. Saaty) 等于 20 世纪 70 年代初，在为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法时提出的一种层次权重决策分析方法。其中心思想是将与决策有关的元素分解成目标、准则、方案三个主要层次，采用定性与定量相结合的计算方法，得到下层因素对上层因素的影响权重，通过比较不同供选方案的总权重大小，从而选择出最佳的方案。

(执笔：崔晋川　校阅：章祥荪)

人工神经网络 [artificial neural network] 模仿生物神经系统的结构和运行方式构造出来的一大类数学模型或计算模型。各种人工神经网络的共同结构是由人工神经元组成的一个有权网络，计算开始时给部分或全部神经元一个输入；运行的共同之处是网络中的神经元全部或局部并行地迭代计算，计算过程可以得到监督也可以没有监督。到整个网络的神经元的状态趋于稳定时，其输出就是计算结果。

人工神经网络的要素有三。一是网络的拓扑结构，例如是*前馈神经网络*还是*反馈神经网络*；二是不同神经元的选择；三是神经元间连接权重的确定：有些网络的连接权重是预先确定的，而有些网络的连接权重是通过学习形成的。学习功能是人工神经网络这一计算模型的最重要的特点。

人工神经网络用于非线性系统的预测、复杂组合系统的近似，广泛应用在信号、图像处理和识别、分类，机器人和智能系统的控制，以及复杂最优化问题的近似求解。

(执笔：章祥荪　校阅：王瑞省)

人工神经元 [artificial neuron] *人工神经网络*中的结点。模仿生物神经系统中的神经元，每个结点接受由网络连接的其他神经元的输出作为其输入，经过非线性转换后加以输出。数学上，神经元是一个非线性复合函数 $a(x_1,\cdots,x_n)=\phi(\sigma(x_1,\cdots,x_n)-T)$，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是来自 n 个神经元 (也可包括自身) 的输入，σ 称为积累函数(accumulation function)。σ 可以是线性的，即 n 个输入的加权和，$\sigma(x_1,\cdots,x_n)=w_1x_1+\cdots+w_nx_n$。$\sigma$ 也可以是更复杂的函数。T 是门限值。ϕ 是非线性的，称为神经元的*激活函数*。

(执笔：章祥荪　校阅：王瑞省)

激活函数 [activation function] 指*人工神经网络*中*人工神经元*的输入–输出函数。激活函数一般是非线性的限幅函数 (limiter)，可有连续性和离散性 (二元) 输出两大类。常用的激活函数有连续型的 S 型限幅器 (sigmoid activation function)、离散型的饱和型限幅器和硬性限幅器。不同功能或不同类型的人工神经网络采用不同激活函数的神经元。

(执笔：章祥荪　校阅：王瑞省)

前馈神经网络 [feed-forward neural network] 一个分层的网络，各层可有不同类型的神经元组成，各层间有连接权重。信号及运算按由输入层、隐层 (可多于一层) 至输出层的方向进行，各层的输出不直接以输入的形式反馈到前面的层次。在网络的学习过程中，输出层的信息可通过外界的计算反馈回来调整网络的权值。

前馈神经网络的应用非常多，其中最重要的有两类：① 模式识别 (分类) 器；② 函数逼近和非线性信号预测。模式识别的数学定义如下：

设模式空间为 $\mathbb{R}^n$，决策空间为 $\{1,-1\}^m$。$\mathbb{R}^n$ 中由 $C(<2^m)$ 类模式构成的集合为 $K_1,K_2,\cdots,K_C$。对于模式 $\boldsymbol{x}\in K_i$，分类器将其映射到决策空间 $\{1,-1\}^m$ 的代表 K_i 的一个子集。前馈神经网络作函数逼近的数学定义如下：设 $(f_1(x),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 中子集 Ω 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个映射，给定 p 组采样数据 $(\boldsymbol{x}^\mu\in\Omega,f_1(\boldsymbol{x}^\mu),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}^\mu))$，构造一个以 $\boldsymbol{x}$ 为输入的、k 层的、有 m 个输出神经元 $y_i(\boldsymbol{x})$ 的前馈神经网络 $N(k,w)$。对于任意给定的正数 ϵ，选取权值 w，使满足

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}||f_i(\boldsymbol{x}^\mu)-y_i(\boldsymbol{x}^\mu)||_s\leqslant\epsilon$$

此处 $s=1,2$ 或 ∞。于是，对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，以上确定的网络的输出可以逼近映射在该点的值。

(执笔：章祥荪　校阅：王瑞省)

感知机 [perceptron] 一类前馈神经网络，主要作样本分类用。最简单的感知机只有输入层和输出层，输入 n 维向量，以一个线性神经元输出 1 或 -1。在给定样本集后用

赫布学习规则修正权值。这样的简单感知机只能区分 $\mathbb{R}^n$ 中的线性可分集合。$\mathbb{R}^n$ 中的两个集合 S_1, S_2 称为线性可分的，即存在 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$，使得对任意 $\boldsymbol{x}^1 \in S_1$ 和 $\boldsymbol{x}^2 \in S_2$，有 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1 \geqslant 0, \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^2 \leqslant 0$。若不存在这样的向量 $\boldsymbol{w}$，则称 S_1 和 S_2 是线性不可分的。多于两层的、采用非线性神经元的感知机可以作为线性不可分集合的分类器。

不同于简单感知机的赫布学习规则算法，一般感知机利用源自最优化方法中梯度法的最小均方算法 (LMS)：设有 $\mathbb{R}^n$ 中的 p 个类的分类问题，样本集为 $(\boldsymbol{x}^\mu, \boldsymbol{o}^\mu), \boldsymbol{x}^\mu \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{o}^\mu \in \mathbb{R}^m, p < 2^m$，其中 $\boldsymbol{x}^\mu$ 为网络的输入，$\boldsymbol{o}^\mu$ 为理想的输出。W 为感知机中的权，设 $f(W, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ 为网络关于输入 $\boldsymbol{x}$ 的输出。权的学习修正是通过极小化非线性函数

$$\min_W \frac{1}{2} \sum_\mu ||\boldsymbol{o}^\mu - f(W, \boldsymbol{x}^\mu)||$$

来得到的。具体的算法均是数学规划中算法的简化，代表之一是*误差反传学习算法*。

（执笔：章祥荪 校阅：王瑞省）

赫布学习规则 **[Hebb learning rule]** 赫布 (D. Hebb) 在 1949 年试图用神经学的观点来解释巴甫洛夫的条件反射学说：一条狗见到一盘食物时会流出口水，如果在给予食物的同时摇响铃铛，多次反复后，在不给食物却摇响铃铛时，狗也会流起口水。赫布的解释是，当神经元 A 处于激发状态时常常得到来自神经元 B 的刺激，则神经元 A 会对 B 的信号变得更加敏感。即由 B 至 A 的突触变得比较发达，由此，神经元 B 会比较容易激发 A 使其发生生物作用。赫布学习规则的简单数学描述如下：设 x 是神经元 B 对神经元 A 的输出，$x > 0$ 表示 B 对 A 的激发，$x < 0$ 表示 B 对 A 的抑制；y 是 A 的输出或状态，$y > 0$ 表示兴奋，$y < 0$ 显示抑制。$w(t)$ 是时刻 t 的 B 至 A 的突触强度，则

$$\Delta w(t) = \alpha x y, w(t+1) = w(t) + \Delta w(t)$$

此处 $\alpha > 0$ 是一个常数，控制权数调整的速度。

（执笔：章祥荪 校阅：王瑞省）

反馈神经网络 **[feedback neural network]** 一个反馈神经网络是指网络中任一神经元的输出必是其他神经元的输入。一般地，最后一层的神经元的输出仅返回给第一层的神经元作为输入。反馈神经网络有许多应用，最主要的有两种：内容可寻址存储器 (或联想记忆器) 和优化问题计算器。

在作为内容可寻址存储器或联想记忆器时，每个神经元具有非线性离散激活函数，状态取二元值，即大小为 n 的网络的状态用向量 $\boldsymbol{y} \in \{1, -1\}^n$ 来表示。给定一组存储模式 $\boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^p$，可用这组模式值定义网络的连接权重，所定义的网络有以下功能：向网络输入带有误差的模式向量 $\boldsymbol{z}$ 作为网络初始状态，按网络连接和激活函数反复迭代计算后，网络的状态会稳定到输入所对应的某个存储模式 $\boldsymbol{y}^i$ 上。

反馈神经网络作为解优化问题的工具的原理是，可以设计一个反馈神经网络使其结构由一组以 $E(\boldsymbol{y}(t))$ 为李雅普诺夫函数的离散动力系统

$$Y(t+1) = f(\boldsymbol{y}(t))$$

或连续动力系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}/\mathrm{d}t = h(\boldsymbol{y}(t))$$

来确定。设 $E(\boldsymbol{y})$ 就是优化问题的目标函数，这样当 t 增大时，$E(\boldsymbol{y}(t))$ 下降使网络的状态 $\boldsymbol{y}(t)$ 收敛到问题的一个局部极小解 y^*。

（执笔：章祥荪 校阅：王瑞省）

霍普菲尔德–汤克网 **[Hopfield-Tank network]** 简称霍普菲尔德网，有离散和连续之分。离散霍普菲尔德网是单层的反馈神经网络。给所有神经元一个初始输入，它们的输出被反馈到所有的神经元再次迭代计算，直到连接两次计算所得的神经元状态稳定不变或出现周期性的状态变化。设 $\boldsymbol{y}(t) \in \{1, -1\}^n$ 为状态向量，则网络的迭代方程组为

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \mathrm{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{T})$$

式中，$\boldsymbol{W}$ 是一个 $n \times n$ 的对称转移矩阵，$\boldsymbol{T}$ 是门限值向量。sgn(.) 表示一个二元限幅器神经元。所以一个 n 个神经元的霍普菲尔德网可记为 $N = (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{T})$。该网络对应的能量为

$$E(\boldsymbol{y}(t)) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t)$$

迭代过程使能量值下降。霍普菲尔德网的迭代方式有两种：异步迭代和同步迭代。异步迭代是指按设定方案每次只计算迭代方程组中的一个方程来改变一个神经元的状态。同步迭代则并行计算方程组同时改变所有神经元状态。

（执笔：章祥荪 校阅：王瑞省）

霍普菲尔德联想网 **[Hopfield association network]** 在*反馈神经网络*和*霍普菲尔德–汤克网*中介绍了反馈神经网络作为内容可寻址存储器 (联想记忆器) 的原理和离散霍普菲尔德网的结构。霍普菲尔德联想网就是用离散霍普菲尔德网来作为联想记忆器。设给定一组 n 维存储模式 $\boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^p$，此时定义

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{n}\left(\sum_{\mu=1}^{p} \boldsymbol{y}^\mu (\boldsymbol{y}^\mu)^{\mathrm{T}} - p\boldsymbol{I}\right)$$

此处 $\boldsymbol{I}$ 为一单位矩阵。输入与某一存储模式相近的向量 (带有误差的存储模式或存储模式的局部信息) 作为网络的初始状态。霍普菲尔德离散网经过迭代后收敛到该存储模式。

（执笔：章祥荪 校阅：王瑞省）

误差反传学习算法 **[back-propagation algorithm]** *前馈神经网络*的一种有监督信息的学习算法。考虑一个三层

的感知机，在输入层有 n 个神经元，中间层有 m 个以 ϕ 为激发函数的神经元，输出层的单个神经元的激发函数为 ψ。由输入层至中间层第 j 个神经元的 n 维权向量记为 $\boldsymbol{w}^j$，由中间层到输出神经元的 m 维权向量记为 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)$。则对一组样本 $(\boldsymbol{x}^\mu,\boldsymbol{y}^\mu)$，具有初始权值 $\boldsymbol{w}^j(t),\boldsymbol{u}(t)$ 的感知机对输入 $\boldsymbol{x}^\mu$ 的输出为

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^\mu)=\psi\left(\sum_{j=1}^{m}u_j\phi((\boldsymbol{w}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^\mu)\right)$$

而其同样本中的理想输出的误差为

$$E_\mu(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}^1(t),\cdots,\boldsymbol{w}^m(t))=\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^\mu)-\boldsymbol{y}^\mu)^2$$

利用对误差的修正来改进权值相当于求解一个优化问题

$$\begin{aligned}&\min E_\mu(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}^1(t),\cdots,\boldsymbol{w}^m(t))\\&=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\sum_{j=1}^{m}u_j\phi((\boldsymbol{w}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^\mu)\right)\right]^2\end{aligned}$$

利用简单的梯度下降法，可以求得权 $\boldsymbol{w}^j(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 的修正公式。由于这一过程是由输出层的误差反回来逐层修正权系数的，故称为反传学习算法。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

自组织映射 [self-organizing map]　一类无监督学习的人工神经网络，能在低纬度空间中重新布局 n 维样本空间中的一组样本 $\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m$，而保留它们在原空间里具有的拓扑关系。这一模型是由科霍宁 (T. Kohonen) 首先提出的，所以也称为<u>科霍宁自组织模型</u>(Kohonen self-organizing model)。

自组织网是单层的前馈网，不同于一般的前馈网，它的 m 个神经元通常排列在二维或三维空间中，每个神经元一开始被赋予一个随机取值的 n 维权向量 $\boldsymbol{w}^i$。每个样本输入到所有神经元，神经元的输出为同该神经元的权向量距离最小的样本向量的编号。学习过程是一个竞争过程，取神经元 i_j 为同样本 $\boldsymbol{x}^j$ 的距离最近者：

$$i_j=\arg\min_{j}\{||\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{w}^i||\}$$

学习过程是对权 $\boldsymbol{w}^i$ 的修正过程，在 t 时刻用样本 $\boldsymbol{x}^j$ 学习时，

$$\boldsymbol{w}^i(t+1)=\boldsymbol{w}^i(t)+\Theta(i_j,t)\alpha(t)(\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{w}^i(t))$$

此处 $\Theta(i_j,t)$ 是以 i_j 为中心的领域函数，一般取以 i_j 为中心的高斯函数，表示除了对神经元 i_j 的权系数作修正外，还对邻近的神经元的权作修正，这是保留样本拓扑关系的关键之处。$\alpha(t)$ 是单调下降的学习强度。反复使用样本集直到神经网络的输出达到稳定。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

玻耳兹曼机 [Boltzmann machine]　采用模拟退火随机学习机制的霍普菲尔德网。设权 $\boldsymbol{W}$ 为对称矩阵，则第 i 个神经元由状态 -1 变到 1 时能量函数的变化为

$$\Delta E_i(t)=\sum_{j\neq i}w_{ij}y_j-2T_i$$

其中 T_i 为第 i 个神经元的门限值，用异步迭代方式来进行计算，第 i 个神经元的选中概率为 $P_i(t)$：

$$P_i(t)=1/\{1+\mathrm{e}^{-\Delta E_i(t)/\theta}\}$$

此处 θ 是系统的退火温度，开始迭代时取较高的值，随着迭代次数增加而减小，使系统得到稳定解。注意到趋于零时玻耳兹曼机变为霍普菲尔德网。由于玻耳兹曼机可以有限度地克服陷于局部极小解的情形，所以被用来解复杂组合优化问题。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

模拟退火 [simulated annealing]　柯克帕特里克 (Kirkpatrick) 等于 1983 年提出的一种求解大规模组合优化问题的概率算法，其主要思想来源于金属退火原理。金属退火是一种物理过程，金属物体加热到一定温度后，金属内部粒子随温度升高变为无序状，在状态空间中自由运动。随着温度的逐渐下降，粒子渐趋有序，逐渐达到平衡。温度达到最低时，粒子以一定的结构排列达到基态，内部能量减为最小。模拟退火将优化问题的求解看为物理系统的退火过程，优化问题的目标函数对应金属的内部能量，解集合相当于金属的内能状态空间。求解优化问题的过程就是寻找一个状态使目标函数值最小。模拟退火算法以搜索空间中的一个任意点作为起始点，每一步从当前最优点的邻居中产生一个新解，根据能量的增减以概率 P 接受新解：

$$P=\begin{cases}1, & \Delta E\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^{(-\frac{\Delta E}{T})}, & \Delta E>0。\end{cases}$$

模拟退火算法的关键是适当地控制温度 T 的下降过程实现模拟退火，从而找到全局优化问题的近似最优解。模拟退火算法与其他局部搜索算法的本质区别在于它除了接受好解之外还以一定的概率接受差解。算法开始的时候温度 T 很高，接受差解的概率较大。随着温度 T 的缓慢减小，接受差解的概率也减小。当温度 T 趋于 0 时，算法不再接受任何差解，达到收敛。模拟退火的这一特点旨在使算法能够从局部最优中跳出，求得优化问题的全局最优解。模拟退火算法已被用来求解许多组合优化问题如旅行售货员问题、背包问题等。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

遗传算法 [genetic algorithm]　一类模拟达尔文生物进化论自然选择和优胜劣汰原理的智能优化算法。遗传算法的概念最早由巴格利 (J. D. Bagley) 于 1967 年提出，其理论和方法由美国密歇根大学的霍兰 (J. H. Holland) 于 1975 年作了进一步系统性的研究。与传统优化方法相比，遗传算

法的优点是实行群体搜索和概率转移准则，因而能跳出局部解，搜索到接近全局最优的近似解。此外，它不需要计算目标函数的导数，能用来求目标函数比较复杂的优化问题。

基本的遗传算法包括编码和初始群体生成、群体评价、个体选择 (selection)、交叉操作 (crossover)、变异操作 (mutation) 等步骤。遗传算法将问题的解编码成染色体，这些染色体称为个体，个体组成的集合称为群体或种群。初始种群从解中随机选择生成，然后按照适者生存和优胜劣汰的原理，逐代演化产生出越来越好的近似解。在每一代，通过适应度 (fitness) 函数对每个个体进行评价。适应度函数一般根据问题的目标来设定。遗传算法根据种群中个体的适应度大小挑选个体，并借助于生物进化中的交叉和变异操作产生出新的个体，组成新的种群进入下一代。

交叉操作和变异操作是遗传算法中最重要的部分，因为它们是产生新个体的主要方法。交叉操作对选中的用于繁殖下一代的两个个体，随机地选择一个位置，按一定概率 P_{c} 在选中的位置实行交换，从而产生两个新的个体。变异操作根据生物遗传中的基因突变原理，以一定概率 P_{m} 对一些个体的某个位置执行变异，产生一个新的个体。变异操作能够增加种群中个体的多样性，使遗传算法避免过早收敛。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

演化算法 [evolutionary algorithm]　演化算法的思想来源于自然界中生物体进化的自然选择原理和自然遗传机制，是一类基于种群的优化算法，具有自组织、自适应、自学习性和并行性等特点。演化算法主要包括遗传算法、演化策略和演化规划。演化策略(evolutionary strategy)是一种模仿自然进化原理求解参数优化问题的算法。基本过程与遗传算法很类似。与遗传算法相比，演化策略不需要编码，而是直接用实数向量来表示解，在解空间上进行变异和选择等操作。演化策略采用自适应的变异策略，强调演化过程中搜索方向和步长的自适应调节。其选择操作是确定性的，只依赖于适应度的排序位置而不是具体的适应度值。演化策略一般只适合求解数值优化问题。随着科学的发展，演化策略已与遗传算法互相渗透，它们之间的差别越来越不明显。演化规划(evolutionary programming)是一种模仿人类智能的方法。它由随机产生的计算机程序群体开始，这个群体是由适合于问题空间领域的函数随机组合组成。这些函数可以是标准的算术运算函数、标准的编程操作、逻辑函数等。群体中的每个计算机程序个体根据其解决问题的能力用适应度来评价。然后应用变异等操作创造新的计算机程序群体。这样一代一代演化下去，经过一定代数，适应度最高的计算机程序个体被指定为演化规划的结果。分段演化计算的这三种算法都是模拟生物界中的自然进化过程而建立的优化算法。它们有许多相似之处，同时也存在较大的差别。演化策略和演化规划都把变异作为主要操作算子，而在遗传算法中，变异只处于次要位置，交叉操作起主要作用。而交叉在演化规划中却被完全省去，在演化策略中与自适应结合使用。遗传算法和演化规划中的选择机制都具有随机性，而在演化策略中选择操作是完全确定的。目前由演化算法组成的演化计算已成为人工智能中的一个重要分支。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

禁忌搜索 [tabu search]　由美国科罗拉多大学的格洛弗 (F. Glover) 于 1986 年提出，是一种基于局部搜索的启发式迭代优化方法。禁忌搜索算法采用邻域搜索程序迭代地从一个解 x 转向这个解的邻域 $N(x)$ 中的解 x'，直到满足某种收敛标准。它包括邻域结构，禁忌表，禁忌长度，候选解集合，评价函数和特赦规则等几个主要概念。为了探索到尚未被探索的解空间，禁忌搜索在搜索过程中不断修改当前解的邻域结构。与其他局部搜索算法不同的是，禁忌搜索对找到的部分局部最优解，通过灵活的记忆结构 (禁忌表) 有意识地避开这些搜索过的区域，据此确定出新的邻域 $N^*(x')$，使算法的搜索过程迭代地从 x 转向 x'，从而避免迂回搜索，使算法获得更多的搜索空间，加强局部搜索的能力。同时禁忌搜索算法通过特赦准则来赦免一些被禁忌的优化解，进而保证多样化的有效搜索途径。禁忌搜索算法的这些特点使得它具有较强的“爬山”能力，搜索时能够跳出局部最优解，获得更好的全局最优解。禁忌搜索算法在组合优化、生产调度、机器学习、电路设计等领域有着广泛的应用，近年来禁忌搜索在函数全局优化方面的应用研究也逐渐增多起来。

（执笔：章祥荪　校阅：王瑞省）

支持向量机 [support vector machine]　建立在统计学习理论基础之上的机器学习方法。它最初于 20 世纪 90 年代由 AT&T 贝尔实验室的瓦普尼克 (V. Vapnik) 提出, 近年来在其理论研究和算法实现方面都有了突破性进展。

支持向量机最初是针对分类问题提出来的。它利用最大间隔原则, 把求解分类问题转化为求解一个凸规划问题, 从而借助于最优化计算方法解决问题。支持向量机目前已被推广到解决回归问题, 聚类问题, 半监督分类问题等。

（执笔：田英杰　校阅：邓乃扬）

分类问题 [classification problem]　根据给定的训练集

$$T = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_l, y_l)\} \in (\mathbb{R}^n \times \mathcal{Y})^l,$$

寻找 $\mathbb{R}^n$ 上的一个实值函数 $g(\boldsymbol{x})$, 以便用决策函数

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sgn}(g(\boldsymbol{x}))$$

推断任一模式 $\boldsymbol{x}$ 相对应的 $\boldsymbol{y}$ 值, 其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 是符号函数。由

此可见, 求解分类问题, 实质上就是找出一个把 $\mathbb{R}^n$ 空间分成两部分的规则。

确切地说, 上述分类问题是分成两类的两类分类问题。与之类似, 还有分成多于两类的多类分类问题。

(执笔: 田英杰　校阅: 邓乃扬)

最大间隔原则 [**maximal margin principal**]　对线性可分的分类问题进行线性分划而言的。所谓线性分划就是采用如下形式的决策函数

$$f(\boldsymbol{x})=\operatorname{sgn}((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x})+b),$$

其中 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n, b\in R$。它用超平面 $(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x})+b=0$ 将 $\mathbb{R}^n$ 空间分成两部分。分别称训练集中对应 $y_i=1$ 和 $y_i=-1$ 的 x_i 为正类点和负类点。所谓线性可分问题就是一个能用超平面将所有训练点完全正确地分开, 使正类点和负类点分别位于它的两侧的问题。

由任一分割超平面出发，可以找到正类点集和负类点集的两个支持超平面。最大间隔原则就是找到一个分割超平面，使对应的两个支持超平面的距离最大。

(执笔: 田英杰　校阅: 邓乃扬)

核函数 [**kernel function**]　称定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 是核函数, 如果存在着从 $\mathbb{R}^n$ 到某一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的变换

$$\Phi:\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\to\mathcal{H},\\ \boldsymbol{x}\mapsto\Phi(\boldsymbol{x}),\end{array}$$

使得

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=(\Phi(\boldsymbol{x})\cdot\Phi(\boldsymbol{x}'))\ ,$$

其中 $(\cdot)$ 表示 $\mathcal{H}$ 中的内积。

常用的核函数有

(1) 线性核函数

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}').$$

(2) 多项式核函数

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^d,$$

和

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+1)^d,$$

其中，参数 d 为正整数。

(3) 高斯径向基核函数

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\exp(-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'||^2/\sigma^2),$$

其中参数 $\sigma>0$。

其余的核函数还有 B 样条核函数, 傅里叶核函数等。

(执笔: 田英杰　校阅: 邓乃扬)

C 支持向量分类机 [**C-support vector classification (C-SVC)**]　支持向量机中求解分类问题的一类算法。这类算法用核函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 代替内积函数 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')$, 实现了把 $\mathbb{R}^n$ 空间中的分类问题转化为希尔伯特空间中的线性分划问题。

支持向量分类机还有其他的形式, 例如 ν 支持向量分类机 (ν-SVC), 最小二乘支持向量分类机 (least square SVC), 中心支持向量分类机 (proximal SVC), 以及基于线性规划形式的支持向量分类机 (linear programming SVC) 等。

上述 C 支持向量机也可以用于求解多类分类问题, 这时可以使用的算法包括一类对余类 (one versus the rest), 成对分类 (one versus one), 纠错输出编码 (error-correcting output codes) 等。

(执笔: 田英杰　校阅: 邓乃扬)

ε 支持向量回归机 [**ε-support vector regression (ε-SVR)**]　支持向量机中求解回归问题的一类算法。通过引入核函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$, 支持向量机把一般的回归问题转化为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的线性回归问题。

支持向量回归机还有其他的形式, 如 μ 支持向量回归机。

(执笔: 田英杰　校阅: 邓乃扬)

投入产出分析 [**input-output analysis**]　由美国科学家列昂惕夫 (W. W. Leontief) 于 1936 年创立。列昂惕夫曾因此获得 1973 年诺贝尔经济学奖。投入是指进行一项活动的消耗，如生产过程的投入是指在进行某项生产活动时对各种原材料、电力和劳务等的消耗。总投入包括中间投入与最初投入两部分。中间投入(intermediate input)是指生产过程中对系统各部门产出的消耗。最初投入(primary input)是指生产过程中对初始要素，如固定资产、劳动等的消耗。产出是指进行一项活动的结果，如生产活动的结果为本系统各部门生产的产品 (物质产品和劳务)。各项经济活动的投入与产出之间具有一定的数量规律性。投入产出分析是研究经济活动中的各种初始要素和中间要素的投入与系统中各部门产出之间数量关系的一门学科。

投入产出分析以棋盘式平衡表的形式汇总地反映国民经济几百个部门中产品的生产与消耗以及生产与使用之间的相互联系，这称为投入产出表。为反映国民经济各部门的最终产出与总产出之间的联系，列昂惕夫提出列昂惕夫逆。利用它可以计算部门间的关联度，包括直接联系与间接联系，研究某个部门最终需求变动和某类产品价格变动对其他所有部门的影响，计算各种类型的完全消耗系数、前向和后向关联系

数以及各种乘数等。目前世界上约有 100 多个国家已编制与使用投入产出表，一些主要国家已系统地、定期地编制全国投入产出表，以及编制地区、地区间 (国家间)、部门和企业等的投入产出表。

投入产出方法与其他方法结合已广泛地应用于经济预测、决策分析、制订和修改规划 (计划)，计算产品的理论价格、产品的完全劳动消耗量和能源消耗量、各种产品的完全污染排放量，以及研究出口带来的完全增加值和完全就业等，在实践中取得显著效果。传统投入产出分析存在以下三个迫切需要解决的问题，即没有反映占用与产出之间的联系、没有解决非线性问题和没有很好地解决模型的动态问题。

(执笔：陈锡康　校阅：杨翠红)

列昂惕夫逆 **[Leontief inverse]**　亦称完全需要系数矩阵 (matrix of total requirement coefficient)，是投入产出分析中的一个非常重要的概念和方法，它表示生产单位最终产品对总产品的完全 (直接和间接) 需要量。它与完全消耗系数的区别在于列昂惕夫逆包括最终产品本身。

在国民经济各部门之间，除了有直接的生产消耗关系外，还有间接的生产消耗关系，比如采煤对电的消耗可分为两个部分：在采煤生产过程中消耗的电，称为煤对电的直接消耗；而采煤生产过程中又需消耗钢材，钢材生产过程中也需消耗电；钢材生产过程中又消耗焦炭，而焦炭生产过程中也消耗电，等等，称为煤对电的间接消耗。前者通过直接消耗系数来体现，后者通过完全消耗系数来体现。完全消耗系数是指为得到某个部门单位最终产品对各部门产品和服务的完全消耗数量。用矩阵形式表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^m + \ldots \\ &= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^m + \ldots) - \boldsymbol{I} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} - \boldsymbol{I}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为直接消耗系数矩阵，$\boldsymbol{A}^2$ 为第一次间接消耗系数矩阵，$\boldsymbol{A}^3$ 为第二次间接消耗系数矩阵，依此类推。$\boldsymbol{B}$ 为完全消耗系数矩阵，而 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 即为列昂惕夫逆矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$，它等于完全消耗系数矩阵与单位矩阵之和。完全需要系数矩阵的计算公式为

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = 1 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^m + \ldots = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{B} + 1$$

(执笔：杨翠红　校阅：陈锡康)

非线性投入产出模型 **[nonlinear input-output model]**　非线性投入产出模型的基本形式是：

$$\boldsymbol{A}(S)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$$

式中，$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 分别表示总产出列向量和最终产出列向量，$\boldsymbol{A}(S)$ 为非线性直接消耗系数矩阵，假没直接消耗系数是变量 S 的函数，S 通常可为产量 X 或时间 t 等。

藤本乔雄 (T. Fujimoto) 于 1986 年假设直接消耗系数为产量 X 的函数，即 $\boldsymbol{A}(S) = \boldsymbol{A}(X)$。在任意维的抽象空间，并且不要求投入函数 $\boldsymbol{A}(S)$ 连续性的条件下，证明了非线性投入产出模型解的存在性、收敛性和唯一性，但 $\boldsymbol{A}(S)$ 的具体形式没有给出。

为了给出 $\boldsymbol{A}(S)$ 的具体形式，曾建立种植业的非线性投入产出模型、6 部门的可计算非线性动态投入产出模型，但其应用领域有一定局限性。

在直接消耗系数矩阵中，对投入产出模型所反映的经济系统具有主要影响的那一小部分系数称为主系数。可通过双层滤波法、影响域法、信息量方法来选取主系数。

(执笔：刘秀丽　校阅：陈锡康)

动态投入产出模型 **[dynamic input-output model]**　列昂惕夫连续型动态投入产出模型为：

$$\boldsymbol{X}(t) - A\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{C}\dot{X}(t) = \widetilde{\boldsymbol{Y}}(t)$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为投入向量，$\boldsymbol{C}$ 为增量资本系数矩阵，$\widetilde{\boldsymbol{Y}}(t)$ 为不包括投资的最终需求列向量，即最终净产出列向量，$\dot{X}(t)$ 为 $X(t)$ 的一阶导数。

列昂惕夫离散型动态投入产出模型为：

$$\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{C}[\boldsymbol{X}(t+1) - \boldsymbol{X}(t)] = \widetilde{\boldsymbol{Y}}(t)$$

在上述模型中，假设资本建设和使用之间需要 1 年时滞，把 t 年和 $t+1$ 年的生产过程联结起来，形成一个动态模型。上述离散型动态投入产出模型已得到部分应用，但它们只考虑了固定资产建设与使用之间的时滞性，因而这一问题是目前的研究热点。

(执笔：刘秀丽　校阅：陈锡康)

投入占用产出技术 **[input-occupancy-output technique]**　投入产出分析的一种扩展，其主要特点是不仅研究部门间产品的投入与产出之间的关系，而且研究占用与产出、占用与投入之间的数量关系。从国民经济核算角度看，它不仅研究流量与流量之间的关系，而且研究存量与流量之间的关系。

投入占用产出技术中的“投入”是指生产过程中的各种消耗，如原料、能源等；“占用”是指对生产中长期使用的物品，如固定资产、流动资产、劳动力、科技、教育、自然资源等存量的拥有状况。投入是流量，而占用是存量。占用是投入与产出的前提和基础，投入与产出的规模、数量和质量取决于占用品的数量和质量。在现代生产活动中企业拥有的管理人员、技术人员和工人的素质，占有的固定资产等的状况，占有土地及矿藏等自然条件的状况对投入和产出的数量及质量有非常密切的，甚至是决定性的影响。

投入占用产出技术主要是针对投入产出分析的不足提出的。投入产出分析没有反映占用与产出之间的联系和占用对产出的制约。在投入产出分析中完全消耗系数的计算公式为：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}$$

其中，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别表示直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。上述公式的主要缺点是没有包括对固定资产所产生的消耗。以钢对电力的完全消耗为例。上式包含了在中间投入范围内的直接消耗和间接消耗，如炼钢生产中消耗的生铁、煤、石灰石等对电力的各种消耗，但没有包括在炼钢过程中消耗的机器设备和厂房中所包含的电力，以及生产机器设备和厂房所消耗的各种产品所耗用的电力。

在投入占用产出技术框架下，计算完全消耗系数的公式如下：

$$b_{ij}^{*}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ij}^{*}a_{kj}+\alpha_{i}d_{ij}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}^{*}\alpha_{s}d_{sj}$$

其中，b_{ij}^{*} 为包含固定资产消耗的完全消耗系数，α_i 为第 i 种固定资产的折旧率，d_{sj} 为 j 部门对第 s 种固定资产的直接占用系数。上式右端第 3 项和第 4 项分别表示通过固定资产的直接消耗和间接消耗，如炼钢生产中所消耗的设备对电力的直接消耗和间接消耗。用矩阵形式表示为：

$$\boldsymbol{B}^{*}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{D}$$

式中，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{\alpha}$ 分别表示包含固定资产消耗的完全消耗系数矩阵、固定资产直接占用系数矩阵和固定资产折旧率对角矩阵。则：

$$\boldsymbol{B}^{*}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{D})^{-1}-\boldsymbol{I}$$

目前投入占用产出技术已成为投入产出领域的一个重要研究方向，在主要农作物产量预测、对外贸易、水资源和水利投资、人力资本、乡镇企业和金融等领域得到了成功应用。

(执笔：杨翠红　校阅：陈锡康)

RAS 法 [RAS approach]　根据基年的投入产出表，利用替代影响和制造影响的一致性假设，将基年直接消耗系数矩阵进行行变换和列变换，得到目标年份的直接消耗系数矩阵的一种数学方法。RAS 法首先假设各行业中间投入的变动来自两方面的影响：一是替代影响，指因价格变动等因素造成产品中间使用上的变动；二是制造影响，指由于技术进步等因素引起产品中间消耗上的变动；并假设这两种变动具有部门一致性，以制造影响为例，如果某列的一个中间投入以某种程度变动的话，则所有这一列的其他中间投入都按同一程度变动。

已知基年的投入产出表，由此计算基年直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}^0$、中间投入行和 $U_i^0=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}^0$、中间投入列和 $V_i^0=\sum\limits_{i=1}^{n}X_{ij}^0$。根据统计资料，可得到现年总产值 X_i、最终产品 Y_i 和最初投入 E_j，由此可得现年的中间投入行和 $U_i=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}=X_i-Y_i$、中间投入列和 $V_i=\sum\limits_{i=1}^{n}X_{ij}=X_j-E_j$。令 $U=(U_1,U_2,\cdots,U_n)^{\mathrm{T}}$，$V=(V_1,V_2,\cdots,V_n)$，$\mu=(1,1,\cdots,1)$，则有：

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{V}\tag{2}$$

根据替代影响和制造影响的一致性假设，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 均为对角阵，分别代表替代乘数和制造乘数。将 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S}$ 代入 (1)、(2) 式，可得 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{V}$。这样就得到 $2n$ 个方程，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{S}$ 为 $2n$ 个未知数，$\boldsymbol{A}^0$，$\hat{\boldsymbol{X}}$，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 均为已知，求解此方程组即可求出 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$，即得到 $\boldsymbol{A}$。

RAS 法的优点是耗时很少，计算方便；缺点是假设与实际有很大差异，由此极大影响 $\boldsymbol{A}$ 阵的准确性。实际上，各种商品并不是完全替代，制造影响对各种投入的影响是有差异的。因此在实际使用中，需要将 RAS 法进行修正，即根据调查统计资料，将直接消耗系数中的部分重点系数 a_{ij} 事先固定，并在原始表中加以扣除，再利用 RAS 法进行计算，然后将重点系数补充到求得的 $\boldsymbol{A}$ 阵中，得到现年的直接消耗系数。

(执笔：祝坤福　校阅：杨翠红)

UV 表法 [make-use model]　亦称商品–产业部门投入产出表法，是编制投入产出表的一种简化方法，最早由英国等一部分国家在编制投入产出表时使用，后由联合国统计局加以推广。

首先，根据投入产出调查中企业填写的各种产品的产量和原材料消耗总值，可以得到：

	商品	产业	最终需求	总产出
商品	$(\boldsymbol{X})$	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{Y}$	$\boldsymbol{Q}$
产业	$\boldsymbol{V}$			$\boldsymbol{G}$
最初投入	$(\bar{\boldsymbol{Z}})$	$\boldsymbol{Z}$		
总投入	$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$		

其中，商品是纯部门 (产品部门)，产业是混合部门 (企业部门)。$\boldsymbol{U}$ 为投入矩阵或消耗矩阵，其元素 U_{ij} 表示第 j 个产业部门所消耗第 i 种商品的数量；$\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q}$ 分别表示商品部门的最终需求和总产值列向量；$\boldsymbol{V}$ 为产出矩阵，或称为制造矩阵，元素 V_{ij} 表示第 i 个产业部门所生产的第 j 种商品的数量，$\boldsymbol{G}$ 为产业部门的总产值列向量；$\boldsymbol{Z}$ 为最初投入矩阵。以上定义的数据资料可以直接通过投入产出调查得到，而中间投入矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和最初投入矩阵 $\bar{\boldsymbol{Z}}$ 为需要计算的矩阵。

UV 表法的优点在于收集所需的数据资料比较容易，计算简单；缺点在于假定性太强，不管是商品工艺假定或产业

部门工艺假定，都会出现不合理的流量，甚至在商品工艺假定下，会出现负流量。

(执笔：祝坤福 校阅：杨翠红)

结构分解分析 [**structural decomposition analysis (SDA)**] 通过对投入产出模型中关键参数变动的比较静态分析而进行经济变动原因分析的一种方法。它通常将经济系统中某因变量的变动分解为与之相关的各独立自变量变动的和，以测度其中每一自变量变动对因变量变动贡献的大小。

最基本的 SDA 是考虑投入产出模型：$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BF}$，其中，$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别表示总产出向量、列昂惕夫 (Leontief) 逆矩阵和最终需求向量。下标 1，0 分别表示计算期和基准期，为定量测算影响两个时期总产出变动因素的大小，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_0&=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_0\\&=(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_0)\\&\quad+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_0)(\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_0)\end{aligned}$$

令 $\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_0$，$\Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_0$，$\Delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_0$，则

$$\Delta\boldsymbol{X}=(\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{B}_0(\Delta\boldsymbol{F})+(\Delta\boldsymbol{B})(\Delta\boldsymbol{F})$$

其中，$(\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{F}_0$、$\boldsymbol{B}_0(\Delta\boldsymbol{F})$ 和 $(\Delta\boldsymbol{B})(\Delta\boldsymbol{F})$ 分别表示经济技术变动的影响、最终需求变动的影响和两者的交互影响。交互影响在实证分析中一般较大，在实际处理中常常将交互影响归因到各自变量，即

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{X}&=(\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_0(\Delta\boldsymbol{F})\\\Delta\boldsymbol{X}&=(\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{B}_1(\Delta\boldsymbol{F})\end{aligned}$$

这个基本模型的不同变形，被广泛应用到经济增长、技术进步、贸易、价格、利润、人口、就业、资源和环保等多方面问题的经济分析中。

(执笔：李景华 校阅：陈锡康)

主要参考文献

[1] 徐光辉. 运筹学基础手册. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] Aumann R J, Hart S. Handbook of Game Theory with Economic Applications. New York: Elsevier, vol.1, 1992, vol.2, 1994, vol.3, 2002.

[3] Baccelli F, Bremaud P. Elements of Queueing Theory. 2nd edition. Berlin: Springer, 2003.

[4] Barlow R E, Proschan F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Silver Spring: MD, 1981.

[5] Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Hoboken,NJ: John Wiley & Sons, 2006.

[6] Bertsekas DP, Dynamic Programming and Optimal Control. Vol 1&2, Cambridge, MA: Athena Scientific, 1995.

[7] Dantzig G B. Linear Programming and Extensions. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.

[8] Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc, 1982.

[9] Puterman M L. Markov Decision Processes. New York: John Wiley & Sons, 1994.

[10] Rockefeller R T. Convex Analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.

[11] Zipkin P. Foundations of Inventory Management. Boston: McGraw-Hill, 2000.