中国数学规划新近进展及展望

摘要

数学规划又称数学优化，它是运筹学的一个重要分支。它主要研究在一定约束条件下，如何求一个实数或者整数变量的实函数的最大值或者最小值。它是运筹学和管理科学中最常用的一种建模工具和求解问题的方法，在工程、经济和金融等领域有非常广泛的应用。在本章中，首先我们简单地介绍数学规划的历史、应用及其主要研究方向；然后我们概述数学规划的发展现状和在中国的发展情况。最后我们将按照数学规划的以下七个主要方向：（1）线性和非线性规划，（2）锥和鲁棒优化，（3）变分不等式和互补问题，（4）多目标优化与向量优化，（5）整数规划，（6）组合优化，（7）张量与多项式优化，分别介绍其背景和应用领域，研究现状，未来发展趋势和主要研究问题。

Recent Development and Future Prospect of Mathematical Programming in China

Mathematical programming or mathematical optimization is an important branch of operations research that studies the problem of minimizing or maximizing a real function of real or integer variables, subject to constraints on the variables. It is one of widely used modeling tools and methodologies in operations research and management science and has numerous applications in engineering, economics and finance. In this chapter, we first give a brief introduction of mathematical programming problems, applications, history and main research areas. We then review the state-of-the-art of mathematical programming study with an overview of the development of mathematical programming in China. Research perspectives of mathematical programming is also presented. The main parts of the chapter devote to the following seven research areas of mathematical programming: (1) Linear and nonlinear programming; (2) Conic and robust optimization; (3) Variational inequality and complementarity problem; (4) Multi-objective optimization and vector optimization; (5) Integer programming; (6) Combinatorial optimization; (7) Tensor and polynomial optimization. In each of the above research areas, we introduce background and applications of the problems, the state-of-the-art of the methodologies, the current research trends and the key research problems.

一、数学规划学科概述

（一）背景和意义

数学规划问题是指在一定约束条件下最大化或最小化某一目标函数的问题，其变量可能是连续或离散的；研究这类问题的数学性质、求解算法和具体实现以及应用这些算法解决实际问题的学科统称为数学规划。数学规划的一个“近似”或通俗的名字是“最优化”。

数学规划问题求解“最优”的特征决定了其应用的广泛性。早在18世纪，著名数学家欧拉就曾说：宇宙万物无不与最小化或最大化的原理有关系。经济社会中，在有限的资源下求解最优的计划、方案、路线、组合和策略等问题都可以归结为数学规划问题；数学规划的应用遍及工程、经济、金融、管理、医药和军事等领域。可以说，数学规划的原理渗入到社会发展的各个方面，甚至在我们的日常生活里也有各种各样的最优化问题。

在学科分类上，一般把数学规划看成是运筹学的一个分支，是运筹学的基础学科。在管理科学中，数学规划是最常用的建模方法和工具，与统计和模拟仿真一起组成三大基本方法

和技术。由于数学规划与数学理论的天然联系，也可以把数学规划看成是应用数学的一个分支。在国际上，数学规划的研究活动分布在运筹学、管理科学、应用数学、计算机科学和电子工程等领域中。在一些国际大型学术组织中，如美国运筹与管理科学学会、国际运筹学会联合会、欧洲运筹学会、美国工业与应用数学联盟和美国计算机科学学会等，数学规划都是非常活跃的研究方向和分支。

数学规划的历史可以追溯到 17 世纪法国数学家费尔马给出的实函数极值点的平稳性条件和 18 世纪法国数学家拉格朗日处理等式约束的乘子方法，而牛顿提出的求函数极值点的迭代算法成为后来无约束最优化和非线性方程组的基本算法。现代数学规划发展于上世纪二次大战以后，其标志是线性规划的提出和应用。1939 年康托洛维奇就已经把线性规划方法应用于二战中前苏联的军事和生产规划，但西方科学界直到 50 年代末才知道他的工作。1947 年，丹齐格提出了求解线性规划的单纯形方法，而冯·诺依曼发展了线性规划对偶理论并将其应用于博弈论。线性规划的单纯形方法的提出被认为是现代数学规划也是运筹学学科的开端，是 20 世纪计算科学的十大算法之一，丹齐格也被认为是“数学规划之父”。1951 年库恩和塔克提出了约束最优化问题必要条件，后称为 KKT-条件，标志着现代非线性规划理论研究的开端。

二战后，西方经济和科学技术的繁荣发展使数学规划的发展进入了黄金阶段，特别是计算机技术的普及使数学规划的算法能真正广泛地应用于求解各种现实问题的最优化模型。随着共轭梯度法和拟牛顿法的提出，非线性规划方法日趋成熟，其中许多算法程序成为工程计算的标准子程序。1979 年卡奇杨提出了第一个线性规划的多项式算法-椭球法，而 1984 年卡玛卡提出的线性规划内点法更使数学规划研究进入了内点法时代，内点法随后被涅斯捷罗夫和尼米洛夫斯基等推广到一些凸优化问题。数学规划的其他分支，如多目标规划和向量优化、整数规划、组合优化、随机优化、变分不等式和互补问题等在上世纪后半叶也得到了迅速的发展，成为相对成熟和独立的数学规划分支和研究方向。近年来，锥优化，鲁棒优化、稀疏优化、张量和多项式优化等成为数学规划新的热点研究方向，连续优化和离散优化的相关理论不断深入和发展，使数学规划成为运筹学学科应用最广泛和最具活力的研究领域。

（二）研究与应用现状

通过几十年的发展，数学规划理论和方法的研究不断深入，应用领域也不断扩大。数学规划的研究大体上可分为三个主要的方面：

（1）数学规划理论：研究数学规划问题相关的数学理论。数学规划的理论研究对学科的发展具有基础性的作用，数学规划的一个鲜明的特点是其理论的严密性。

（2）数学规划算法：研究求解数学规划问题的精确和近似算法。这是数学规划研究的核心部分，是数学规划学科应用性的体现，是数学规划学术研究和现实应用之间的桥梁。没有算法研究的数学规划只能停留在数学理论领域。在数学规划发展的历史上，算法研究是推动数学规划发展的主要力量，新算法的提出推动学科向前发展。

（3）数学规划建模、应用与软件：数学规划的生命力在于其应用的广泛性，从丹齐格把线性规划应用于美国空军作战计划开始，数学规划的发展都与解决实际应用问题密切相关。工业、管理和信息等领域中有许多最优化建模问题，利用这些问题的物理特性建立模型后，需要对模型进行分析和简化，并应用合适的算法软件进行求解，而后回到现实环境中进行最优解分析和参数敏感性分析等。可以说，重要的数学规划问题都来源于实际，其研究成果能被应用于实际。

数学规划的理论和应用属性决定了其研究队伍的广泛性和分散性。在国内和国际学术界，数学规划的研究小组和人员一般分布在如下几个学科领域：1）数学和应用数学领域，这部分研究小组和学者主要从事数学规划理论和算法的基础研究；2）工业工程、系统工程和运筹领域，这部分研究小组主要以应用为导向，从事数学规划建模、算法和应用研究；3）管理科学领域，这部分研究小组和学者更注重最优化建模和分析，与管理科学中的运作管理、物流与供应链管理和金融工程有比较密切的合作和联系；4）信息与计算机科学领域，这部分研究小组致力于计算复杂性和算法设计与分析、信息处理的优化理论、模型、方法和应用

研究。当然，上述领域的分类并不严格，许多研究小组和学者都从事理论、算法和应用的交叉研究。目前数学规划的主要研究领域有：

（1）**线性规划**：研究目标函数和约束函数都是线性的数学规划问题的理论和算法，这类问题的可行域是多面体和多胞形。线性规划在形式上是最简单但也是应用最广泛的数学规划问题。线性规划是多项式时间可解的数学规划问题，其主要算法是单纯形算法和内点算法。

（2）**非线性规划**：研究目标或约束函数有非线性性质的数学规划问题，有如下的一些主要研究分支。凸规划是非线性规划中经典和重要的一类问题，系指目标函数和约束都是凸的数学规划问题。无约束优化问题的经典算法有共轭梯度法、拟牛顿法和信赖域法。经典的约束优化问题的算法有罚函数法、可行方向法、内点法和序列二次规划方法等。二次规划问题指目标函数是二次而约束是线性的非线性规划问题。二次规划是介于线性规划和一般非线性规划之间的数学规划问题，其理论和算法研究趋于成熟，主要算法有传统的积极集法和近年来发展的内点法。当目标和约束都是二次函数时，这一类问题称为二次约束二次规划问题，其研究难度则大大增加。多项式规划研究目标函数和约束函数都是多项式的数学规划问题。多项式优化与张量分析、代数几何和矩理论等数学分支密切相关。目前，求解多项式优化问题的主要途径是松弛和近似方法，如平方和逼近等。锥规划研究可行域是锥的非线性规划问题，锥规划包含了线性规划、半定规划和二阶锥规划，这三类特殊锥规划问题都可以用内点法求解，是多项式时间可解的问题。全局优化研究如何求解非凸最优化问题的全局最优解，由于非凸问题的全局解不能由 KKT－条件完全刻画，全局优化问题通常比凸优化问题困难得多，需要借助分支-定界等方法求解。

（3）**整数规划**：研究全部或部分变量为整数的数学规划问题。经典的整数规划理论侧重线性整数规划，近年来，二次和凸整数规划也日益受到人们的关注。由于变量的离散性，整数规划问题通常比相应的连续规划问题更难于求解，因为整数规划一般都是 NP-难的。分支-定界和分支-割方法是目前求解整数规划的主要算法框架。

（4）**组合优化**： 研究在有限可行解集合中寻找最优解的数学规划问题。尽管可行域是离散有限的，可行集规模往往具有指数及以上的量级，故穷举法并不适用于寻找最优解。组合优化的研究与组合数学、图论、网络、拟阵、算法理论和计算复杂性有密切关系。组合优化和整数规划都是离散优化的组成部分。

（5）**随机规划**：研究部分或全部参数是随机变量的数学规划问题。随机规划是在不确定环境下的一种最优化建模方法。利用参数的概率分布性质，随机规划研究如何寻找对所有或几乎所有情景下都可行的策略，以最大化某个决策变量和随机变量的函数的期望值。随机规划的一个经典和成功的例子是两阶段随机规划。随机规划的求解往往归结为一个具有特殊结构的大规模线性或非线性规划问题。

(6)**鲁棒优化**：研究参数具有不确定性或误差的数学规划问题。与随机规划不同的是，鲁棒优化不假设参数是随机变量，而是考虑参数是由某个确定性的集合来刻画。为克服不确定性，鲁棒优化寻求对所有参数集合或误差范围内都可行的解。

（7）**动态规划**：研究一类满足所谓“最优性原理”的最优化问题，其最优策略可分解为一序列更小规模的子问题来求解，这些子问题之间的关系由贝尔曼方程给出。

（8）**多目标规划**：研究同时最优化多个目标函数的数学规划问题。非平凡的多目标优化问题目标函数是相互冲突的，不存在同时优化每个目标函数的最优解，而具有多个甚至是无穷多个帕累托最优解。当帕累托序换成一般的偏序时，多目标规划可进一步推广为向量优化。

（9）**变分不等式和互补问题**： 变分不等式是指一类含泛函的不等式，必须对某一变量的所有取值都满足。互补问题是一类数学规划问题，其约束条件中含有变量互补条件。

（10）**均衡约束数学规划**：研究约束条件包含变分不等式或互补条件的数学规划问题，其主要困难是由于可行域的非凸性甚至非连通性。

数学规划在各个领域的应用最终都需要通过算法来实现，所以，从最初线性规划的单纯形算法开始，人们就致力于实现各种数学规划算法，并由此产生了许多著名的算法软件。而为了使从事实际应用的工程管理人员方便利用这些算法软件，人们又开发了最优化建模语言系统，在这些建模语言系统环境下，应用管理人员可以方便地为各种数学规划问题建模并调用相应的算法软件求解和分析，而不必编写复杂的编程语言。由比克斯比开发的 CPLEX 就是

一个算法软件由学术研究走向商业化的成功例子，它是运筹和管理科学研究的主流最优化软件，也是最成功的商业化最优化软件之一。比克斯比后来和华人学者顾中华创立 Gurobi 优化软件系统，成为与 CPLEX 并驾齐驱的商业优化软件。表 1 列出了一些国际上主流的优化软件系统。

本专题报告余下内容将简要回顾我国数学规划研究的发展进程，分析数学规划未来发展趋势，深入介绍数学规划若干重要研究方向。对每个研究方向，将分别介绍其学科研究领域概述、国内外研究现状分析和研究发展趋势与关键科学问题。将主要介绍下面七个研究方向：线性与非线性规划，锥优化和鲁棒优化，变分不等式和互补问题，多目标优化和向量优化，整数规划，组合优化，张量分析与多项式优化。

表 1：主要最优化算法软件

软件名称	软件功能介绍	说明
GAMS	最优化建模语言系统，可以连接调用各种主流线性与非线性优化和整数规划算法软件	需要许可证
AMPL	同上	需要许可证
AIMMS	同上	需要许可证
CVX	基于 Matlab 的凸优化建模语言系统，特别是可求解 SDP 和 SOCP 问题(通过 SeDuMi 或 SDPT3)	免费
CPLEX	线性和二次混合整数规划，可处理二阶锥约束	免费学术许可证
GUROBI	同上	免费学术许可证
Matlab Optimization Toolbox	线性规划，二次规划，无约束优化，约束优化，全局优化，0-1 线性整数规划	需要许可证
MOSEK	线性与非线性最优化和整数规划算法软件	需要许可证
BARON	基于分支-定界的求解非凸优化问题的全局优化软件(可通过各种建模语言系统用)	需要许可证

二、我国数学规划研究的发展进程

我国数学规划的研究始于 1960 年代，是最早开展研究的运筹学分支之一。管梅谷 1960 年发表在《数学学报》的论文中提出的中国邮递员问题是文革前我国学者在组合优化领域中的第一个有国际影响的工作。1970 年代初越民义和韩继业开始排序理论的研究，并在日本召开的第七届国际运筹学大会上报告了多台机器的流水作业排序问题研究成果。我国数学规划的系统研究是在文革结束后才开始的，并产生了一些有特色和原创性的成果。在越民义、桂湘云、吴方和韩继业等的带领下，中国科学院应用数学所开始线性和非线性规划的研究，并带动和促进了国内该领域的研究，吸引了一批国内学者进入最优化领域，并在上世纪 70 年代末期产生了一些有影响的工作，如越民义和韩继业关于既约梯度法的改进和收敛性证明；俞文紫 1979 年在《中国科学》发表关于无约束优化直接法的收敛性证明，是国际上最早研究尼尔德-米德单纯形直接法收敛性的学者之一；郑权的积分水平集全局优化方法也受到国内外的关注；游兆永在非线性方程组和非线性优化方面有深入的研究。这些老一辈的数学规划开拓者还致力于我国数学规划的人才培养、教材出版和学术期刊创办，对我国数学规划学科的发展起了重要的推动作用。

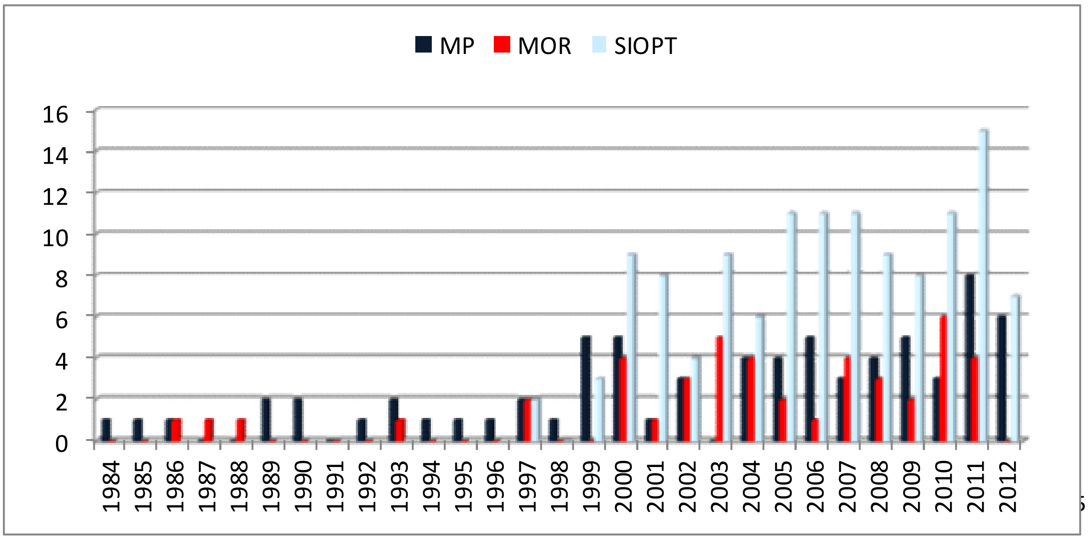
上世纪 80 年代是我国数学规划发展的起步阶段，数学规划研究队伍初具规模，在学科建设和人才培养方面都开始步入正轨，研究水平也不断提高，数学规划的研究和教学开始在全国各地许多大学开展。除线性和非线性规划外，在越民义等人的带领和推动下，国内组合优化的研究也逐渐发展起来。中科院和国内部分高校相继建立了组合优化研究组，在网络优化、排序理论、装箱和拟阵划分等方向展开研究，取得了出色的成果。1988 年，袁亚湘从剑桥大学回国，在中科院计算数学所开展数学规划研究，使我国在信赖域方法、共轭梯度方法和拟牛顿方法等非线性规划领域的研究达到国际领先水平，并培养了大批优秀的数学规划人才。1981 年国务院授予首批“运筹学与控制论”硕士点，中科院、中国科技大学、清华大学、西安交通大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、吉林大学、山东大学、大连理工大

学、上海科技大学（现上海大学）、郑州大学和曲阜师范大学等都相继开始招收硕士研究生。除中科院外，山东大学和浙江大学还获得首批“运筹学与控制论”博士点。80 年代培养的研究生许多都成为数学规划研究的学术骨干，并在全国各地的大学开展数学规划研究和人才培养。随着我国的改革开放，国际学术交流也越来越便捷。国外学者来访和我国学者到国外进修访问也日益频繁，我国数学规划研究开始融入国际学术界。1980 年代中期，我国学者已开始和国外学者合作在运筹与优化领域国际权威期刊发表论文。研究领域也从最初主要是连续优化领域扩展到组合优化、排序理论、多目标优化、全局优化、非光滑优化、随机优化等分支。1982 年在武汉召开了首届全国最优化理论和应用学术交流会。1984 年，《运筹学杂志》作为中国运筹学会的会刊在上海大学创刊，为国内数学规划研究提供了一个宝贵的交流平台。

进入上世纪 90 年代后，我国数学规划学科开始步入成熟发展阶段，研究领域扩展到数学规划的各个重要分支。数学规划的学术交流活动也日益频繁和正规。1994 年在西安召开了第二届全国最优化学术会议，并成立了中国数学规划研究会，决定每 4 年召开一次全国数学规划年会，1998 年在武汉召开第三届全国数学规划学术会议，数学规划研究会更名为中国运筹学会数学规划分会。由于历史的原因，我国数学规划研究队伍除中科院外大部分在高校的数学系，这使得研究领域和视野受到一定的限制，偏重理论研究，而与应用领域的结合和交叉研究较少。90 年代后，部分高校的管理科学系、计算机科学系、电子工程系、运输科学、系统和工业工程等院系相继组建了运筹和优化研究小组，在通信网络设计、交通规划与管理、供应链优化、金融优化、芯片设计优化、数据挖掘、传感器网络、遥感与油气资源勘探、指纹识别和指纹压缩等领域开展研究工作，并取得了一系列应用成果，这在一定程度上改善了我们数学规划研究重理论轻应用的倾向。

2000 年后，我国数学规划研究进入了繁荣阶段。随着国际学术交流与合作的深入，与国外学者合作的研究项目越来越多，优化领域的许多海外华人学者回国开展学术交流，举办讲座、研讨会和暑期学校，使我国数学规划研究的水平不断提高。其标志之一就是我国学者在国际运筹与优化主流期刊发表的论文有了明显的增加。Mathematical Programming 是国际数学规划学会的会刊，创刊于 1971 年。中山大学王则柯和中科大徐森林 1984 年在该刊首次发表署名国内单位的论文（与美国学者库恩合作）。至 2012 年，国内学者共在该期刊发表论文 72 篇。Mathematics of Operations Research 是美国运筹与管理协会的旗舰期刊之一，创刊于 1976 年，是运筹与优化理论领域的权威期刊。堵丁柱与黄光明合作 1986 年在该期刊发表第一篇署名国内单位的论文。至 2012 年，国内学者共在该期刊发表论文 45 篇。SIAM Journal on Optimization 是国际工业与应用数学学会旗下的著名优化期刊，创刊于 1991 年。国内学者首次在该期刊发表论文的时间是 1997 年，2 篇论文的作者分别是中科院计算数学所彭积明和袁亚湘，应用数学所孙德锋和韩继业。至 2012 年，国内学者共在该期刊发表论文 124 篇。我国学者历年发表在上述 3 个期刊的论文统计见图 1。

图 1:中国学者（不包括台湾地区）历年发表在 MP，MOR 和 SIOPT 上论文统计



在学术交流方面，数学规划分会从1994年起每两年举办一次全国性学术会议，至2012年已举办9届，参加年会的代表人数从最初的一百余人到近年来的四百多人。1990-2012年期间，在国内召开的数学规划领域各类国际性学术会议共有40多次。这些讲习班和暑期学校吸引了大批研究生和青年学者参加，对我国数学规划的发展起了积极的推动作用。

三、 数学规划未来发展趋势

从线性规划于二战后诞生起，数学规划的研究方向和内容在过去 60 多年来一直不断发展和变化，数学规划的发展规律与其数学理论属性和应用科学属性密切相关。一方面，数学规划的算法和应用需要坚实的数学理论基础，需要新的数学方法和工具的支持，故数学规划的发展具有基础学科的特点，其发展有其自身的规律，以探求新的性质，完善理论体系，发现不同概念和理论之间新的有趣的联系为研究动机，这些研究往往与应用没有直接的联系。另一方面，数学规划研究受到应用的导向和影响，许多新的研究方向正是为解决数学规划应用中发现的问题而发展起来的。数学规划模型的很大一部分是由工程领域提出的。数学规划研究在未来的发展可能具有如下的趋势：

（1）**连续优化与离散优化的交叉与融合** 传统上，连续优化的方法与离散优化方法有本质上的不同。KKT-条件在连续优化算法理论和设计中扮演着重要的角色，而离散优化没有相应的最优性条件，本质上只能利用部分枚举的思想来搜寻最优解。近年来离散优化的研究趋势之一是利用连续优化的许多新成果来设计近似算法和紧的松弛。利用凸优化方法近似具有组合结构的问题也在一些离散优化问题中取得了成功。另一方面，由于许多离散优化问题可以表为协正锥上的优化问题，而协正锥规划是凸规划问题，故凸规划其实包含有许多离散和组合问题，未来锥优化方法的发展将直接影响着离散优化的发展。

（2）**不确定和动态环境下的数学规划** 传统的优化模型假设参数都是确定的和精确的，而最优解也是在这个基本的假设下通过算法求得的。在现实世界中，许多优化模型中的参数具有不确定性。两种基本的不确定性是：参数是随机变量或参数是有误差的。在参数是随机变量的情况下，我们可以建立随机优化模型；当参数的不确定性是由某个集合刻画时，则可以建立鲁棒优化模型。然而，不论是用随机变量还是集合刻画不确定性，都需要知道分布或集合的完全准确的信息，而这些信息往往在实际中很难得到。目前国际上的一个新的研究方向是：当我们仅知道概率分布函数的部分信息情况下，可以建立分布鲁棒优化模型。数据驱动数学规划模型不假定参数的不确定性的精确和完全信息，而利用观察的数据直接进行建模和求解，不确定信息通过学习进行多阶段校正。基于数据驱动的数学规划是未来的一个可能的研究趋势。传统的优化问题假设模型中的参数是全部已知的，然后应用算法进行求解，而在线优化问题是指信息不完全的情况下仅利用已知的部分参数信息即时或短时间内做出决策的优化问题，并且做出的决策不可更改。在线优化中参数信息往往是在算法执行过程中逐步到达的。在线优化的应用包括许多动态环境下的优化问题，如复杂交通系统的调度问题、实时金融决策问题的和各类复杂生产问题等。在线优化方法将是数学规划研究的一个值得关注的趋势。

（3）**数学规划与信息科学的交叉**　二十一世纪是信息技术的时代，信息技术的发展不但事关国民经济和国防安全，也改变了我们每个人的生活方式。近年来，数学规划的许多理论和方法在信息科学中得到了应用。如芯片设计中组合优化问题，稀疏优化在信号处理和压缩感知中的应用，张量优化在医疗诊断信息技术中的应用等。

（4）**数学规划与数据和统计科学的交叉** 海量数据是信息化时代数据的特征，最优化与数据挖掘的交叉是近年来的一个研究趋势，利用基于最优化的分类聚类、关联、预测和模式从海量数据中提取潜在有用知识的数据，形成智能数据挖掘技术。另一方面，统计科学与最优化技术的结合和交叉也是未来的一个研究趋势，基于最优化理论的统计学习和主成份分析技术也引人关注。统计方法反过来也能帮助建立更好的数学规划模型。

（5）**数学规划与管理科学的交叉** 管理科学中的许多重要问题都与最优化有直接或间接的关系。随着全球经济的一体化进程，物流与供应链管理、库存管理、收益管理等管理科学问题中出现了新的优化问题。与交通运输规划相关的数学规划问题一直是数学规划研究的重要领域，在数据信息化和互联网时代，交通和运输规划中的复杂优化问题具有大规模、大

数据、实时在线等特点，给数学规划带来了新的机遇和挑战。

（6） **数学规划与金融的交叉** 最优化方法是数量金融中的一个有力工具，特别是风险管理和投资组合管理一直与数学规划方法密切相关。2008 年以来的全球金融危机更使人们认识到风险管理的重要性。随着金融市场化的进程，国内金融市场对风险管理的需求越来越大。基于新的风险度量的风险管理和投资组合优化模型是近年来的一个研究热点，由于金融数据的特殊性，对收益的预测往往误差较大，所以结合统计方法建立更合理和稳健的优化模型是金融优化的一个研究趋势。

（7）**数学规划应用** 近二十年来，我国数学规划研究在理论和算法方面取得了令人瞩目的成果，但数学规划的应用一直是我国数学规划发展中的薄弱环节。数学规划应用研究在美国、英国和德国等工业发达国家有悠久的传统，利用数学规划方法解决通信网络、交通、城市规划、化工合成、钢铁冶金、遥感与油气资源勘探、图像处理、医院管理和水资源管理等方面已有许多成功的案例。随着我国经济社会的发展，数学规划在工业、管理、医疗和金融等领域的应用大有可为。2002 年，中国运筹学会设立了“运筹学应用奖”，历年获奖的项目中就有许多与数学规划有关。数学规划应用研究是未来的一个发展趋势，将越来越受到人们的重视。

四、 数学规划主要研究方向

（一） 线性与非线性规划

1．研究领域概述

线性规划旨在线性约束条件下求线性目标函数的最小值。它是运筹学中研究较早、发展、较快、应用广泛、方法较为成熟的一个重要分支，广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等各个方面。其想法可以溯源到傅立叶 1832 年的工作，康托洛维奇 1939 年正式提出线性规划问题，丹齐格 1947 年提出了线性规划的一般数学模型和求解线性规划问题的通用方法——单纯形法，为这门学科奠定了基础。冯诺依曼 1947 年提出对偶理论，开创了线性规划许多新的研究领域，并扩大了它的应用范围和解题能力。科普曼斯 1951 年将线性规划应用到经济领域，为此与康托洛维奇一起获 1975 年诺贝尔经济学奖。1950 年代后对线性规划进行大量的理论研究，并涌现出一大批新的算法。卡奇杨 1979 年第一次提出了求解线性规划的基于椭球算法的多项式时间算法，卡玛卡 1984 年提出了被称为内点法的新的多项式时间算法。现已形成线性规划多项式算法理论。线性规划的研究直接推动了其他数学规划问题包括整数规划、随机规划和非线性规划的算法研究。由于计算机的发展，出现了许多线性规划软件，如 MPSX，OPHEIE，UMPIRE，CPLEX，XPRESS，GUROBI 等，可以很方便地求解几万个变量的线性规划问题。

非线性规划研究多元实函数在一组等式或不等式的约束条件下的极值问题，且目标函数和约束条件至少有一个是未知量的非线性函数。根据问题特点和对解的要求，它又可以分为无约束优化、约束优化、凸规划、二次规划、非光滑优化、全局优化、几何规划、分式规划、稀疏优化等研究方向。它是 1950 年代开始形成的一门学科。1951 年库恩和塔克发表的关于最优性条件的论文是非线性规划正式诞生的一个重要标志。在 50 年代还得出了可分离规划和二次规划的几种解法，它们大都是基于丹齐格提出的解线性规划的单纯形法。50 年代末到 60 年代末出现了以拟牛顿方法、罚函数方法等为首的许多解非线性规划问题的有效的算法，70 年代又得到进一步的发展，包括增广拉格朗日乘子法和逐次二次规划算法。非线性规划在工程、管理、经济、科研、军事等方面也同时得到广泛的应用，为最优设计提供了有力的工具。20 世纪 80 年代以来，在信赖域法、内点法、无导数方法、稀疏优化、交替方向法等诸多方向取得了丰硕的成果。目前主要的非线性规划软件和测试环境有 CUTEr、IPOPT、LINGO、MOSEK、NLPQLP、EASY-FIT、CVX 等。

全局优化是非线性规划的一个重要分支，主要研究求解非凸优化问题的全局最优或近似全局最优解。由于非凸优化问题可能存在多个不同的局部最优点，基于导数信息的KKT最优性条件不再适用于刻画非凸问题的全局最优性，从而经典的局部优化方法不能保证收敛到全

局最优解。全局优化较系统的研究始于上世纪70年代，狄克逊等编辑的关于全局优化的书综述了全局优化的最近进展，为后来全局优化的深入研究起到了促进作用。图伊和霍斯特是早期全局优化研究的先驱者，他们在凹规划和DC规划的系统研究成果使全局优化开始形成一个真正的学科。由帕德罗斯在90年代初创立的《Journal of Global Optimization》在全局优化的发展中起到了重要的作用，全局优化作为非线性规划的一个分支开始受到广泛的关注，越来越多的学者开始从事该领域的研究，特别是对一些具有特殊结构的非凸优化问题的研究取得了许多突破性的成果。基于分支-定界的全局优化通用软件BARON的发展和其在优化建模系统GAMS和AIMMS中的嵌入应用使学术界和工业界可以方便地求解一定规模的非凸问题的全局解。

大规模优化问题往往具有其自身的结构和特点。一个可能的重要特征是它们的解往往具有某种稀疏性，这使得近年来稀疏优化发展非常迅速[1,2,3]。另一个的重要特征是，固定部分变量后对于剩余变量具有显式解或者易于求解，这促进了交替方向法的迅速发展。交替方向法是求最直接简单的坐标轮换法的推广，第一次被严格数学刻画是格罗温斯基 1975 年将交替方向法的基本思想引入了数值求解偏微分方程的能量泛函极小化问题。这个方法一般被称为“乘子交替方向法”或者“增广拉格朗日交替方向法”，现在也被直接简称为“交替方向法”。但格罗温斯基的交替方向法缺乏收敛性保证。加贝和默西尔 1976 年证明了在目标函数是凸的、两块可分离，两块做交替的交替方向法是收敛的。这是数十年来关于交替方向法最好的结果。交替方向法作为一种优化方法在数值偏微分方程和其它工程领域广泛应用，但是被优化界认可，还得归功于它在压缩感知上的成功应用，特别是它的等价形式分裂布雷格曼方法更是在图像、通讯领域广为应用。

2. 国内外研究现状分析

线性规划已有算法的步数均与问题的数据输入字长有关。至于是否存在计算步数与问题数据输入字长无关，而只与问题维数和约束个数有关的多项式时间算法是目前线性规划研究领域最基础的问题。论文[4]首次提出一个求解组合线性规划的强多项式时间方法，论文[5]基于分层最小二乘的思想，提出了步数只与问题维数、约束个数及约束矩阵有关的多项式时间原始对偶内点算法。论文[6]对于一类特殊的马尔可夫决策问题证明了使用丹齐格 1947 年的最小简约价格转轴规则的单纯形法具有强多项式计算复杂性。最近，论文[7]对于具有零一解的一类线性规划问题给出了强多项式算法，并且可以用作为一般线性规划问题构造多项式算法的基础。

在非线性无约束优化方面，一些基础的优化方法一直得到关注的同时，以尼德－梅尔德单纯形方法和鲍威尔共轭方向法为代表的经典无导数方法，在工业界得到广泛使用，吸引了许多著名学者的注意[8]。这些新的无导数方法目前对于无约束优化和界约束优化问题取得成功，如何推广到一般的非线性规划仍然需要很多的研究。

罚函数在发展约束最优化方法过程中一直扮演着十分重要的角色。许多经典的约束最优化方法或是通过直接求一系列罚函数的（近似）最优解来逼近原问题的解，或是以罚函数作为效益函数，并通过迫使罚函数下降来实现算法的全局收敛。但这种状况在弗莱彻和勒费耶 2002 年提出滤子方法以后发生了变化。论文[9]提出和发展了各种求解非线性约束最优化问题的有效的滤子方法及其相关的全局收敛性理论，一些滤子方法也被证明具有局部快速收敛性质。最近，论文[10]提出和发展了一个求解等式约束最优化的不使用罚函数或滤子技术的信赖域逐步二次规划方法及其全局收敛性理论，数值测试表明该方法对求解标准测试问题集中的问题非常有效。论文[11]提出和发展了一个求解等式约束最优化的不使用罚函数或滤子技术的使用线搜索的逐步二次规划方法及其全局和局部收敛性理论，且该方法与内点方法结合可推广来求解带有不等式约束最优化问题。内点方法是求解非线性不等式约束最优化的另一种有效的方法。论文[10]提出了求解非凸约束最优化的原始对偶内点方法并在没有约束正则性假设下给出了算法的全局和局部收敛性分析。

约束最优化基本理论是在约束正则性假设下建立的。约束正则性影响拉格朗日乘子的存在性和有界性，因此在算法设计和收敛性分析中起着举足轻重的作用。论文[12]考虑了弱约束正则性条件下的增广拉格朗日方法，论文[13]提出了弱约束正则性条件下的算法终止条件

并考虑了相应的算法和收敛性。论文[14]提出并研究了不可行意义下逐步二次规划算法的超线性收敛性。

全局优化问题的困难在于问题的非凸性使 KKT－条件一般不足以保证全局最优性，从而无法利用局部优化算法寻找全局最优点。全局算法需要函数和问题的全局性质，但我们的数学理论很难或无法刻画一般多元函数的全局性质，这是全局优化问题的本质困难所在。目前，全局优化问题的研究方向可大体分为对具有一般特性非凸优化问题的研究和对具有特殊结构的非凸优化的研究。基于剖分区域和凸松弛的分支-定界算法是求解全局优化问题的基本算法框架。一般认为，如不利用问题的特殊全局性质，分支-定界算法在合理时间内能求解的问题规模不大，只有充分利用问题的特殊结构和信息，才有可能设计有效的全局优化算法或快速的近似算法。

凹函数在多面体上求最小的问题称为凹规划，由于凹函数在多面体上的最小值必在顶点达到，故可利用顶点枚举或部分枚举的算法策略来设计算法。DC函数是指可以写成两个凸函数之差的函数，DC规划主要研究含DC函数的非凸优化问题的全局最优解。目前在线性约束DC优化问题和反凸规划等特殊形式的DC规划研究上有一定的进展，相应的算法有基于单纯形剖分的分支-定界算法等，但都只能求解很小规模的问题。如果问题没有特殊的性质和结构可利用，随机算法不失为一种选择，这方面的研究有基于各种投点策略的随机投点算法，积分水平集方法的实现也依赖于随机投点。近年来利用模拟仿真技术提出的全局优化算法具有较好的随机收敛性质，对基于试验的工业设计有很好的应用前景。当然，基于神经网络和遗传算法思想的随机全局优化算法在工程中也有一些应用。非凸二次规划是形式上最简单的全局优化问题，具有广泛的应用背景，也是目前被研究得最多的具有特殊结构的非凸优化问题。几类特殊的非凸二次规划是：箱子约束非凸二次规划，标准二次规划，二次指派问题和非凸二次约束二次规划。非凸二次规划的研究重点是构造有效的凸松弛，利用凸松弛我们可以进一步发展有效的分支-定界算法和近似算法。非凸二次规划的半定规划松弛或二阶锥规划松弛是近年来的一个广受关注的研究课题，由于半定规划和二阶锥规划具有多项式时间算法，故可有效地得到问题的下界并可利用随机化算法得到可行解。

论文[15,16]在推广交替方向法作出了重要的贡献。随着研究的深入，人们发现交替方向法不但可以应用在压缩传感，在矩阵完整化、影像处理、统计学中的协方差阵估计等中都有很好的应用，但在那些问题中，往往需要更高块数的交替方向，但是交替方向算法的收敛性在多块情况是没有保证的。因此人们开始关心这个方法的收敛性。在交替方向法的收敛性上，论文[17-20]通过变分不等式的角度提出了一些修正的交替方向算法，那些算法在对目标函数的凸性和可分性的要求下，任意块交替的收敛性和复杂度都是有保证的，这是在交替方向算法的研究中到目前为止最令人振奋的结果。然而修正的交替方向算法的数值表现往往不如原汁原味的交替方向算法。所以对原版的交替方向算法的收敛性研究还吸引了大多数研究者的兴趣。但现在的结果往往要求一些非常严苛和并不合理的条件。交替方向算法另一个有趣的研究目标是估计它的线性收敛速度。论文[21]通过局部误差界函数的估计，给出了一系列结果，几乎可以涵盖交替方向算法的所有已有的收敛性和收敛速度结果。

国内研究队伍现状 线性规划方面，中科院系统所和计算数学所上个世纪八、九十年代内点法方面有大量的研究工作，潘平奇课题组则多年来一直致力于线性规划单纯形法的转轴规则的研究，这对于提高单纯形法的效率有很大的影响。在非线性无约束优化算法和理论方面，中科院计算数学所在信赖域法、拟牛顿法、共轭梯度法、最速下降法等方面有基础性的研究工作，例如提出并解决了求解信赖域子问题的截断共轭梯度法的“1/2 猜想”；给出了 BFGS 方法不收敛的完美例子，其中单位步长正好是凸线搜索函数的唯一极小点；通过将自调节无记忆拟牛顿法作投影，得到一个新的共轭梯度格式。湖南大学、华南理工大学、广西大学等也在非线性方程组的线搜索设计方面、拟牛顿方程的改善及相关算法、共轭梯度法等方面有较多的研究工作。在非线性约束优化算法和理论研究方面做了大量的研究工作。论文[22-23,11]主要研究了没有约束正则性假设下的逐步二次规划方法和内点方法的设计及其全局和局部收敛性理论。孙文瑜等研究并提出了新的非线性约束最优化的滤子方法，濮定国等研究并提出了新的非线性约束最优化的滤子方法和不使用罚函数或滤子技术的方法，朱德通等研究了求解凸约束最优化的仿射调节内点方法。袁亚湘等研究了使用增广拉格朗日函数作为效益函数的逐步二次规划方法。

3．研究发展趋势与关键科学问题

从整体来看，线性规划与非线性规划的研究呈现出以下特点：(1) 自适应技术和非单调策略在算法中越来越多的被使用；(2) 在现有算法的基础上，结合启发式算法与随机策略用于求解大规模、复杂优化问题的全局解；(3) 设计算法，在较为合理的时间内求得一个不必十分精确但较为满意的解；(4) 根据具体问题的实际特点展开理论和算法研究。下面列举一些关键科学问题：

（1）寻求对于一般线性规划问题或某些特殊线性规划问题的强多项式算法。

（2）求解大规模线性规划问题的一阶算法。这时，最优解的精度往往也不需很高。

（3）DFP 方法的收敛性质。DFP 方法是第一个拟牛顿法，大大地推动了非线性优化的发展。然而，采取沃尔夫非精确搜索的 DFP 方法对一致凸函数是否收敛，仍然并不清楚。

（4）锥规划问题的出现对非线性规划算法和理论提出了新的挑战。目前锥规划的研究主要集中在凸最优化的研究方面，而且其算法和收敛性理论依赖于不易检验的斯莱特约束规范条件。进一步研究更加有效的在弱约束正则性条件下或没有约束正则性假设下的非线性规划算法及其全局收敛性和局部快速收敛性理论，将是未来约束最优化研究的一个重要发展方向。

（5）不可行意义下非线性约束最优化算法设计及其超线性收敛性也是未来约束最优化研究的一个重要发展方向。

（6）大规模非线性约束最优化问题的数值技术是未来约束最优化研究的另一个重要发展方向，如有限存储的约束最优化算法、子问题非精确求解的约束最优化算法。

（7）凸逼近和凸松弛方法。利用凸优化领域发展的成熟方法进行松弛和逼近是全局优化的一种自然也是有效的算法策略。线性逼近、凸二次逼近、二阶锥规划逼近和半定规划逼近都是可用的逼近方法。如何发展更有效的凸逼近方法是一个值得研究的课题。

（8）非凸二次规划。这可能在很长一段时间的一个重点研究方向，其原因是二次问题是有丰富全局性质，我们可以利用矩阵分解信息，特征值性质和二次规划与协正矩阵锥的关系来建立非凸二次规划的全局最优性条件或性质，进而设计更有效的精确和近似算法。

（9）基于模拟仿真技术的全局优化算法。对于没有特殊信息和结构的全局优化问题，基于模拟仿真技术的算法思想可能是有希望的，特别是对低维问题，具有学习特性的模拟仿真随机方法往往简单实用，也能证明随机收敛性。

（10）特殊结构的全局优化问题。具有特殊结构，尤其是有一定全局性质可以利用的问题将是一个有希望的研究方向，如分式规划、多项式规划、二次指派问题、可分离规划等。另外，利用现代数学关于函数全局性质的最新成果，如代数几何和多项式代数理论等，也是一个值得注意的研究方向。

（11）当目标函数或约束函数是非凸不可分离的情形，如何设计交替方向法，并研究算法的收敛性质。

（二） 锥优化和鲁棒优化

1．研究领域概述

（1）对称锥 最近十多年，对称锥优化问题已经成为一个相当活跃和热门的研究领域，吸引了一大批科学研究工作者，其中包括凸规划、线性代数、数值优化、组合优化、控制论、不确定优化、鲁棒优化、博弈与均衡理论以及统计方向的许多专家。究其原因，是因为人们发现对称锥优化在这些领域有着极其广泛和重要的应用。经典的线性及非线性规划问题，半定规划问题，以及二阶锥优化问题，都可以统一在对称锥优化问题的框架下。甚至某些补问题与变分不等式问题的最优性条件也是通过求解对称锥优化问题得到的。特别是近些年来，对称锥优化问题被广泛应用在经济、管理、交通、工程设计、通信、控制等实际部门，许多国际优化界的著名专家和学者也从不同角度致力于对称锥优化问题的研究。2006年8月，论文[24]在世界数学家大会上的大会报告专门介绍了对线性对称锥优化这一类较一般的线性锥优化问题的理论，算法和应用，这标致着对称锥优化已经得到国际数学界的广泛关注。

（2） **矩阵锥** 陶哲轩等人在2006年提出的压缩传感理论而引发的低秩矩阵问题，其理论与算法研究是当今优化领域与信息科学领域共同关心的热点研究课题。向量的l_1范数对应着矩阵的核范数，含有矩阵核范数的以矩阵为变量的优化问题是典型的矩阵锥优化问题。矩阵锥的定义和理论由孙德锋等提出，在解决矩阵低秩优化问题，矩阵完整问题等已显现出优势。

（3）**鲁棒优化** 考虑带有不确定性的问题：

$$P(u) \qquad \min \{f(x,u): x\in \Omega (u)\}$$

其中x为决策变量，u为不确定的参数。实际计算时，往往会计算某一特定值u_0所定义的问题P(u_0)的解，但很多的情况是，u_0发生一微小的扰动导致扰动后问题P(u)的解和问题P(u_0)相差非常巨大。为克服这一缺点，给定不确定集合U，把问题构建成鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{f(x,u): u\in U\} \\ \text{s.t.} \quad & x\in\Omega(u), \forall u\in U. \end{aligned}$$

这一鲁棒模型可以很好地解决模型$P(u)$不稳定的问题。这一思想在上世纪70年代就被提出，上世纪80年代末由于系列工作[25]的发表，学者们开始关注鲁棒优化这一研究方向，取得丰硕的成果。很多学者对鲁棒优化的建模思想心存疑虑，认为鲁棒优化的解过于保守，基于这样的认识，最近很多学者开始研究分布鲁棒优化问题。分布鲁棒优化的思想甚至更早，第一篇这一方面的论文是斯卡夫于1958发表的关于报童问题的工作。设u是随机变量，它的分布是F，在假设已知F的部分信息，比如关于一阶矩，二阶矩等信息，即F的属于某一集合Ψ。比如，$\Omega (u)=\{x: g(x,u) \le 0\}$，则分布鲁棒优化的模型定义

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{\mathrm{E}_F[f(x,u)]: F\in\Psi\} \\ \text{s.t.} \quad & \max\{\mathrm{E}_F[g(x,u)]: F\in\Psi\} \le 0. \end{aligned}$$

2. 国内外研究现状分析

（1）**一般锥优化** 基于欧式若当代数，学者们提出了求解线性对称锥优化问题的内点法，并证明了其多项式复杂性。并用牛顿法求解松弛后的线性对称锥优化问题的KKT－系统，证明各种不同的原始对偶内点法的收敛速度均具有多项式复杂性。关于和互补问题相关的P-性质，Z-性质的研究也是一个热点问题，因为这些性质和对称锥补问题的光滑化方法与牛顿型方法密切相关，当然也和补函数的性质相关。在对称锥的变分分析方面，孙德锋和孙捷研究了勒夫纳算子算子可微、半光滑性质。北京交通大学团队给出了欧氏若当代数中的勒夫纳算子与投影算子广义雅可比的表达式，这一结果对对称锥优化算法的研究起着重要的作用。在对称锥优化的扰动分析方面的进展也是可喜的，大连理工大学团队与孙德锋合作详细研究了非线性对称锥优化问题的扰动分析。清华大学团队对线性锥优化问题进行了系统的研究，在非负二次函数锥方面取得了系列成果。

（2） **二阶锥规划** 线性二阶锥优化的内点方法已经非常成熟，有效的数值软件也被大家广泛使用。非线性二阶锥优化的增广拉格朗日方法的理论分析也已经非常完善。非线性二阶锥优化的扰动分析也非常完善。近几年这一方向上的重要工作包括以下三项：论文[26]研究了非线性二阶锥规划问题的一阶及二阶最优性条件,并从二阶最优性条件的角度描述了强正则性,从而为发展非线性二阶锥规划问题的算法提供了理论基础。论文[27]给出了二阶锥投影算子同源的计算公式，并将其用于研究二阶锥互补约束下的最优性条件。论文[28]证明了二阶锥优化 KKT－系统的强正则性与奥宾性质的等价性。

（3）**半定规划** 线性半定优化的内点方法已经非常成熟，数值软件也被大家广泛使用，可以求解维数小于 500 的问题。除了关于内点算法的工作，以下几项工作尤为重要：论文 29]完善了对称半正定矩阵锥的变分分析。包括勒夫纳算子的微分学和非光滑分析。尤其刻画了到对称半正定矩阵锥的 B-次微分，次微分。论文[30]完成了非线性 SDP 问题的稳定性分析，他首次证明了 KKT 系统的强正则性与一半光滑映射在 KKT 对处的次微分的非奇异性是等价的，为发展非线性二阶锥规划问题的算法提供了理论基础。论文[31]研究了线性半定规划问题的扰动分析，得到对偶问题的约束非退化条件等价于原始问题的强二阶充分条件这一漂亮的结果。论文[32]用牛顿方法解决了协方差阵逼近问题，软件被商业界广发使用。论文[33]给出了严格互补条件不成立时增广拉格朗日方法的收敛速度的分析。针对线性半定规划算法不能解决大规模问题这一缺点，论文[34]提出了牛顿-共轭方法，可以求解大规模问题。

（4） **矩阵锥优化** 论文[35]提出解决并对称矩阵的秩约束优化的方法。孙德锋给出矩阵锥优化的定义，论文[36]给出了矩阵锥的变分分析。作者建立了非对称矩阵的勒夫纳算子的微分学和非光滑分析学，并讨论了$k-$范数引导的线性矩阵优化的扰动分析。

（5） **鲁棒优化** 专著[25]对鲁棒优化的进展给出详尽的叙述。论文[37,38]对各种组合优化问题，二阶段问题，机会约束优化问题的进的分布鲁棒优化模型进行了研究，把它们转化为可处理的锥优化模型求解。香港中文大学的学者使用对偶理论，S-引理，概率不等式等工具，对矩阵分布鲁棒约束优化问题进行深入研究。

国内研究团队现状 北京交通大学应用数学系的团队在对称锥的变分分析，对称锥互补问题的光滑牛顿法，以及与压缩感知，统计优化相联系的矩阵优化方面突出。清华大学数学系团队在共正锥和非负二次函数锥方向的研究方面突出。大连理工大学数学科学学院团队在非凸锥优化的增广拉格朗日方法，二阶锥均衡约束数学规划，半正定均衡约束数学规划，锥优化逆问题，矩阵锥变分分析，随机优化方面擅长。上海大学数学系团队在对称锥内点方法，二阶锥内点方法及其应用方面突出。天津大学数学系团队在对称锥补问题的光滑化方法与张量优化的研究方面突出。

3. 研究发展趋势

对称锥的研究已经处于停顿状态，因为除了大家熟悉的半正定矩阵锥和二阶锥等，找不到合适的应用背景。但很多非对称锥有很重要的实际背景，得到学者们的重视。线性半定规划的可以有效求解大规模问题的算法和软件依然是一个重要的问题。非线性半定规划方法的序列二次规划方法的研究没有新的结果。在理论上，非线性半定规划的 KKT－系统的强正则性是否与奥宾性质等价是一个难题。矩阵锥优化的研究刚刚开始，尤其各种来自研所感知，统计分析的具有重要意义的矩阵优化问题的有效方法的研究是值得关注的方向。共正锥优化的研究引发了很多理论问题，目前有很多著名的优化专家在这一方向上工作。张量优化必然是矩阵优化之后的研究领域，要有纯粹数学的积累才能在这一方向上有所突破，线性数值代数的知识是远远不够的。分布鲁棒优化的研究国际上刚刚兴起，是一有前途的学术方向。

（三） 变分不等式和互补问题、双层规划与均衡约束数学规划

1. 研究领域概述

变分不等式与互补问题是一类具有普遍意义的均衡优化模型；均衡约束数学规划是约束中含有变分不等式或互补系统的约束优化问题；双层规划问题是一种约束中包含优化问题、亦即具有上下两层结构的系统优化问题，其上层问题和下层问题都有各自的决策变量、约束条件和目标函数。这几类问题密切相连，不仅为非线性约束优化、极大极小问题、非线性方程组、微分方程等提供了一个统一的理论框架，而且在管理科学、经济学、博弈论、交通运输、工程设计、最优控制等众多领域有着广泛的应用。

互补问题的最早文献[39]出现在 1940 年，其中主要考察寻找线性不等式组的极小元，但这一工作并没有引起人们的重视。互补问题真正成为一个受关注的问题，则起始于上个世纪六十年代初“线性规划之父”丹齐格和他的学生科特尔的研究。1964 年论文[40]首次提出了求解互补问题的非线性规划算法。变分不等式的系统研究起始于开创性工作[41]，其中使用变分不等式作为一个解析工具来研究自由边界问题。虽然变分不等式与互补问题的来源不同，但后来发现，变分不等式是互补问题的一个推广，而且它们在数学性质以及应用等方面有惊人的相似之处，所以，它们经常在文献中成对出现。对变分不等式与互补问题的研究，一般分为理论与算法两个方面，前者主要研究解的存在性、唯一性、稳定性与灵敏度分析、解集的性质、误差界理论，以及它们与其他数学问题的联系等，后者则主要建立有效的求解方法及其算法相应的理论与数值分析。

双层规划模型可以追溯到斯坦克尔伯格于 1934 年提出的主从博弈问题[42]，而关于双层规划的系统研究则始于 1970 年代的论文[43]。双层规划问题是非凸优化问题，即使最简单的线性双层规划问题也已被证明是 NP-难问题。双层规划问题的另一个特点是，即使所涉及的函数都是有界的连续函数，也不能保证原问题存在最优解。不难理解，与普通的单层数学规

划问题相比，双层规划问题的求解要困难得多。尽管在过去的几十年中有关双层规划的研究已经取得了很多重要的成果，但研究成果还主要集中于线性双层规划、凸双层规划等简单情形。对于更一般的情形，无论是在最优性等理论方面，还是在数值解法方面，都还远未到成熟的阶段，未来的路还很长。

均衡约束数学规划与双层规划密切相关。事实上，不论是研究双层规划问题的最优性条件，还是开发逼近算法，一般都需要把双层规划问题转化为单层的数学规划问题。目前最为流行的即是通过把下层问题用其最优性条件来替换的研究途径，而这样得到的单层规划问题就是均衡约束数学规划。当下层问题非凸时，按照上述途径得到的均衡约束数学规划与原来的双层规划问题并不一定等价。从这种意义上理解，均衡约束数学规划是比双层规划应用更为广泛的一类数学规划问题。均衡约束数学规划也是典型的非凸优化问题。从几何观点来理解，它的可行域一般都是若干个“片”的并集，具有显著的组合特征。鉴于均衡约束数学规划的广泛应用前景以及问题自身的极富挑战性，自上世纪八十年代后期，有关均衡约束数学规划的研究即开始广受关注，参见专著[44-45]。经过多年来的发展，关于均衡约束数学规划的近似算法已经日渐成熟，参见综述论文[46]。近年来，为进一步丰富均衡约束数学规划理论，人们更多的开始关注均衡约束数学规划的高阶最优性、稳定性及灵敏度分析等理论课题以及像随机均衡约束数学规划这样更为一般化的问题。

2. 国内外研究现状

经过五十余年的发展，变分不等式与互补问题得到了长足的发展，一些新的方向不断出现。双层规划与均衡约束数学规划虽然密切相关，但各有特点，研究的手法也大不相同。双层规划由于结构上的复杂性，讨论起来要复杂得多。均衡约束数学规划则既富有挑战性，相对而言也比较容易处理，目前在理论及算法方面都已经发展得相对成熟。

（1）**变分不等式与互补问题** 线性互补问题的研究已经获得了丰硕的成果，上世纪九十年代初的专著[47]极大地推动了线性互补问题的普及与发展。对于变分不等式与非线性互补问题，综述[48]和专著[49,50]对当时已获得的成果给出了很好的总结，极大地推动了变分不等式与互补问题这一领域的发展。线性互补问题的理论研究密切相关于所涉及矩阵的性质，不同类型矩阵的性质是线性互补问题理论研究的基石，主要的矩阵类包括半正定矩阵、正定矩阵、$P(P_0)$矩阵、$Q(Q_0)$矩阵、充分矩阵、Z-矩阵等。借助于矩阵性质的分析，建立了线性互补问题的理论，包括解的存在性、唯一性、解集的凸性、误差界理论、极小元素解的存在性等。另外，通过讨论线性互补问题与很多不同问题间的等价转化；一方面可为线性互补问题的理论与算法研究提供途径，另一方面也可将线性互补问题在理论与算法方面的研究成果应用于其他问题。变分不等式与非线性互补问题的理论研究主要包括解的存在性、唯一性；解集的非空有界性、联通性、灵敏度分析与稳定性分析；误差界理论；极小模解；极小元素解等，1984 年论文[52]首次提出了连续映射的例外序列的概念，并用以研究互补问题解的存在性。上世纪九十年代后期起，通过利用拓扑度作为工具很多学者对连续映射提出了更广泛的例外簇概念并应用于研究变分不等式与互补问题解的存在性与解集的有界性等，得到了很多新的理论结果。线性互补问题的算法研究成果丰富，已趋向于成熟。目前较流行的方法包括内点算法、重构算法等迭代算法。上个世纪八十年代，内点算法被成功地用于线性互补问题，不但获得理论上的多项式复杂性，而且得到了很好的数值计算结果。到九十年代初，线性互补问题被成功地重构成一个方程组，并且基于此，提出了非内部连续化算法、光滑牛顿算法、广义牛顿法等重构算法，这类算法具有快速收敛性质，数值计算结果好且实施方便。变分不等式与非线性互补问题的算法研究一直是这一领域备受关注的核心内容。主要的算法包括投影法、邻近点算法、交替方向法、增广拉格朗日法、内点算法、重构算法等。投影法是求解互补问题的一类基本而重要的计算方法，它源于求解凸约束优化问题的投影梯度法。各种投影法被成功的应用于求解变分不等式问题，成为求解变分不等式的主要方法之一。

上个世纪九十年代，二阶锥规划和半定规划成为国际优化领域的主要研究热点之一；半定规划被誉为“二十一世纪的线性规划”。相应地，二阶锥互补问题和半定互补问题成为变分不等式与互补问题领域的研究热点。很多有效的算法被提出，其中主要流行的算法包括内点算法和重构算法。一些方法已被延伸到求解非线性二阶锥互补问题和非线性半定互补问题，如 2003 年论文[53]中提出了求解非线性半定互补问题的非内部连续化算法并建立了算法

的收敛性理论。目前，对于二阶锥互补问题和线性半定互补问题的研究已有较丰硕的成果；人们正在致力于非线性二阶锥互补问题和非线性半定互补问题的研究。

对称锥线性规划包含二阶锥规划和半定规划作为重要特例；对称锥互补问题包含二阶锥互补问题和半定互补问题作为重要特例，它们为很多问题提供了统一的框架。上个世纪九十年代末，论文[54]提出了求解对称锥线性规划的内点算法，使得这一领域成为研究热点。论文[55]建立了对称锥互补问题的某些理论结果；论文[56]提出了求解对称锥互补问题的内点算法。最近的论文[57,58]提出了求解对称锥互补问题的光滑型算法。

近年来，求解各种优化问题的一阶方法由于解决重要实际问题的需要而倍受青睐。一方面，求解优化问题算法的发展引起了求解变分不等式算法的系统深入研究，另一方面，求解变分不等式算法的深入研究可用于解决很多实际问题。论文[59]对求解变分不等式的收缩算法提出了统一的框架，与经典算法相结合提出了多个有效的算法，并用于解决实际的优化问题。

大多研究中考虑所涉及参数是确定的问题；然而在实际问题的建模中所涉及的参数往往难以精确得到。随机变分不等式与随机互补问题的研究起始于上个世纪九十年代[60]。2005年论文[61]提出了一个新随机互补问题的重构模型；论文[62]中提出了一个新随机变分不等式的重构模型，并探讨了新模型的理论与算法。有关随机变分不等式与随机互补问题的最新进展见综述[63]。

（2）双层规划 关于双层规划的早期研究主要集中在像线性双层规划、凸二次双层规划等一些具有较好性质的问题。由于双层规划为非凸优化问题，因此有必要研究双层规划的最优性条件。为此，需要首先将双层规划转化为单层的数学规划问题，通常有两种转化方式：1）利用下层问题的 KKT-条件，即将双层规划问题转化为均衡约束数学规划来处理。这种方式的缺陷是一般只适用于下层问题是凸规划，并且满足一定约束规范的情形。2）利用下层问题的最优值函数。这种方式得到的单层规划问题虽然与原问题等价，但由于最优值函数为非光滑函数，因此该单层规划是非光滑优化问题，而且不满足非光滑 MFCQ，一般需要更抽象的平稳性条件来代替。论文[64]将以上两种转化方式结合起来，并在更弱的条件给出了双层规划问题的一阶最优性条件。对于一些具有特殊结构的双层规划问题，算法方面的研究相对比较成熟。对于一般的双层规划问题，目前的求解方法主要包括：利用下层问题的 KKT 条件将双层规划转化为 MPEC，直接搜索法，利用下层问题的最优值函数和其它还包括罚函数法、信赖域法、遗传算法等[65-69]。

（3）均衡约束数学规划 尽管关于均衡约束数学规划的研究历史并不太长，但相关的理论和算法都已经相当完备。值得一提的是，绝大多数有关均衡约束数学规划的论文都是针对互补约束数学规划问题进行讨论，这一方面是因为互补约束相对容易处理，另一方面则是因为变分不等式约束在适当条件下可以转化为互补约束。均衡约束数学规划为非凸优化问题。然而，由于均衡约束数学规划在其任意可行解处均不满足通常的约束规范条件，常用的 KKT 条件并不适用于均衡约束数学规划。有鉴于此，人们从不同的角度出发，对均衡约束数学规划的一阶最优性条件进行了广泛的研究，常见的包括论文[70]中提出的克拉克稳定性条件、强稳定性条件等以及论文[71]中提出的稳定性条件。其中后者的稳定性条件最为理想，但由于形式抽象，一般难于求解；相比较而言，强稳定性条件与该稳定性条件一直以来都受到更多的关注。人们进一步还对均衡约束数学规划的二阶最优性条件以及相关的约束规范条件进行了讨论。这些最优性成果为进一步开发各种数值算法以及进行相应的收敛性分析提供了可靠的理论基础。论文[72]讨论了含参均衡约束数学规划问题，将之视为带几何约束的含参优化问题来考虑，并在适当条件下给出了局部最优解映射以及稳定点映射均为非空值且关于扰动参数连续等稳定性结果。求解均衡约束数学规划的多种途径主要包括：1）松弛与光滑化途径，即对互补约束引入松弛或光滑化参数，进而得到原问题的近似问题。2）罚函数途径。3）隐式规划途径，仅适用于互补约束存在隐式解的情形。4）识别积极集途径，即利用松弛或光滑化近似问题以及某种积极集识别技术，逐步把目标点处的积极指标识别出来。5）转化为约束方程组途径。目前流行的 MPEC 稳定性条件都是含有未知指标集的不确定系统，无法直接求解。最近，人们成功地将这些不确定系统转化为带有简单约束的方程组，并提出了具有全局超线性收敛性的算法。6）其它还包括序列二次规划途径、非光滑途径等[6-8]。随机均衡约束数学规划作为均衡约束数学规划的进一步发展，其随机型近年来开始受到关注。目前随机均衡约束数学规划的主要模型有三个：下层观望模型，此时此刻模型，多选择混合模

型。与确定性均衡约束数学规划相比，随机型中通常都包含数学期望，约束中则既有互补约束，也可能包含随机约束。对于数学期望，最流行的处理方法是利用（拟）蒙特卡罗方法进行近似逼近；对于互补约束，处理方法可参考前面有关确定性均衡约束数学规划的部分；而对于随机约束，则需要具体问题具体分析，采取适当的策略来处理。特别值得一提的是，对随机型的各种近似算法进行收敛性分析时要用到概率工具，收敛性结果往往也是概率收敛。关于随机均衡约束数学规划的更为详细的介绍，参见综述论文[24]。

（4）**国内研究现状** 南京大学研究组、中科院数学与系统科学研究院研究组是国内最早从事这一领域研究并取得重要成果的研究组，南京大学研究组对变分不等式的多种算法进行了系统深入的研究并对一些算法给出了统一的理论分析；中科院数学与系统科学研究院研究组在利用例外簇研究对变分不等式与互补问题解的存在性、解集的有界性方面做出了一系列国际公认的成果，他们也在求解变分不等式与互补问题的光滑型算法方面取得了很多优秀成果。在变分不等式的算法研究方面，复旦大学、北京交通大学、南京师范大学、曲阜师范大学等单位的研究组也得到了很多好的研究结果；在求解变分不等式与互补问题的光滑型算法等重构算法方面，北京交通大学、天津大学、西安电子科技大学、福州大学等单位的研究组也进行了深入的研究。在随机变分不等式与随机互补问题方面，大连理工大学/上海大学研究组、北京交通大学研究组等进行了系列研究，得到了深刻的结果。在二阶锥互补问题和半定互补问题的内点算法方面，上海大学研究组等取得了好的成果。在对称锥互补问题方面，北京交通大学、天津大学的研究组提出了求解这类问题的光滑型算法并建立了算法的收敛性理论；大连理工大学、北京交通大学等单位的研究组建立了这类问题的一些理论结果；上海大学研究组等探讨了求解这类问题的内点算法。国内在变分不等式与互补问题的理论与算法研究方面，已取得了很多国际水平的优秀成果，与国际先进水平相比，主要的不足在于开创性、奠基性的工作较少。国内在变分不等式与互补问题的应用方面，缺乏较深入的应用研究，与国际先进水平相比有较大差距。

中科院应用所与系统所的研究组率先开始了双层规划相关研究。之后复旦大学/上海交通大学研究组、武汉大学研究组、中国人民大学研究组、西安电子科技大学研究组、哈尔滨理工大学研究组等相继加入，在双层规划的算法及其在管理科学、电力市场等领域的应用等方面做出了很多出色的工作。国内在均衡约束数学规划方面的研究大致始于 2000 年前后，当时国际上这一方向的研究正是热点，加之国内与国际间的交流也日益加强，复旦大学/上海交通大学研究组、河北工业大学研究组、大连理工大学/上海大学研究组、中国人民大学研究组等相继开展了相关研究，并陆续发表了一系列具有国际影响的重要成果。当然，不论是双层规划还是均衡约束数学规划，国内的研究水平与国际先进水平之间相比还有不小的差距。与数学规划的其他分支相比，从事双层规划与均衡约束数学规划研究的人员也偏少。

3. 研究发展趋势和关键科学问题

（1）**变分不等式与非线性互补问题** 传统变分不等式与互补问题的理论与算法已经得到了很好的研究，趋于完善。发展趋势之一是探讨更广模型的理论与算法，这些问题涵盖面广，意义重大，但研究难度大，亟待人们去探索。另一个发展趋势是问题驱动的模型研究，即具有重大应用背景的数学问题的理论与算法研究，以解决重要实际问题。未来研究方向和关键问题包括：非线性二阶锥互补问题、非线性半定互补问题、对称锥互补问题等的理论与算法研究，近年来得到了较快的发展，但远未完善，值得进一步探讨。另外，更广的锥互补问题。压缩传感的思想是以少量的采样来获取高维的稀疏信息，由于很多实际问题的刻画具有稀疏性特征，所以压缩传感的思想已被广泛地应用于解决很多重要的实际问题，其核心体现在数学上就是找某个模型的稀疏解。很多实际问题可模型化为变分不等式与互补问题，因此，探讨变分不等式与互补问题的稀疏解的理论与算法，具有重要意义。已有研究中主要考虑所涉及参数是确定的问题；然而在实际问题的建模中所涉及的参数往往难以精确得到。根据实际问题的需要，参数的不确定性可以通过不同的方式来刻画，不同的刻画导致不同的问题模型。因此，探讨不确定信息下的变分不等式与互补问题的模型、理论、算法等具有重要的理论意义和实际应用价值。

（2）**双层规划与均衡约束数学规划** 随着时代的发展，双层规划与均衡约束数学规划等复杂数学规划问题的应用将会越来越广泛，因此对这些问题的理论与算法等的需求也会越

来越迫切。未来研究方向和关键问题包括：对于非凸优化问题，最优性理论是进行收敛性分析的基础。目前关于双层规划的一阶最优性条件已经有了一些，但还没有和算法进行有机结合，而高阶最优性条件还需要去研究。此外，关于含参双层规划问题的稳定性与灵敏度分析也还没有人去进行较为系统的研究。理论研究之外，关于算法的研究应该是未来的主要目标。当然，算法方面要一步到位也不现实，可以优先考虑某些具有特殊结构的问题。关于悲观双层规划的研究是一个很有挑战性的课题。关于均衡约束数学规划的最优性理论已经相当丰富，但与之相关的灵敏度分析以及其对偶理论等方面的成果还不多见，值得去研究。另外，带均衡约束的广义纳什均衡问题、带二阶锥互补约束的最优化问题，以及带衡约束的均衡问题等比均衡约束数学规划应用更为广泛的问题在近年来已经开始受到人们的关注。借助于均衡约束数学规划方面所取得的成果，对上述广义的问题进行理论及算法的研究应该是前景可期的。关于随机随机均衡约束数学规划的模型研究仍有待进一步完善，像带机会约束的随机均衡约束数学规划、鲁棒均衡约束数学规划等，都可以找到相应的应用背景，非常值得进一步研究。

（四）多目标优化与向量优化

1. 研究领域概述

在工程技术、经济与管理、商业与金融、物流和网络等许多实践领域中，大量的问题需要同时面对多个目标或多个准则做优化或决策。这类问题的数学模型是在一定约束条件下极小化或极大化一个向量值目标函数，即多目标优化或向量优化问题。向量优化问题是通常的数值优化问题或单目标优化问题的推广，向量优化问题的研究成果均适用于数值优化问题。另一方面，与实数的大小关系不同，向量序关系通常不是完全的。因此，研究向量优化问题的方法和技术与研究数值优化有许多不同；数值优化问题的解可能不唯一，但对应的最优值只有一个，而向量优化问题的最优值一般都有多个，这为向量优化问题的研究带来了诸多理论和方法技巧方面的困难。然而，现实中大量的实际问题需要面对多个目标做出选择和权衡，这使得向量优化问题的研究成果具有更广泛的应用前景。因此，在理论、方法和应用上的深入研究就非常必要和有意义。

向量优化的研究依赖于数值优化、泛函空间理论、非线性分析、变分分析和集值分析等数分支，它是一个处在深入发展阶段的多分支学科交叉的研究领域。其研究可追溯到 19 世纪末帕累托的工作，帕累托有效点和帕累托有效解等向量优化理论中基本而标准的概念即源于帕累托当时的工作。但向量优化作为一个学科分支却始于 20 世纪 50 年代论文[73,74]。自上世纪 60 年代以来，向量优化的理论研究有了长足发展，每个年代都有众多学者对其开展广泛的研究，并在帕累托解的存在性、连通性、真有效性、对偶理论、标量化方法、向量变分不等式、向量均衡问题以及稳定性等方面获得了丰富而深刻的成果。与理论研究相比较，向量优化问题的算法研究明显滞后。向量序的不完全性以及解集和对应最优值集的复杂性使得对简单的线性向量优化问题都没有有效的算法，甚至相对简单的两个目标的优化问题都是 NP-难的。 因此人们只能针对具体的实际问题依其特殊结构尝试设计对应的算法。过去几十年，已出现许多就经济、物流、网络和风险投资等方面的具体问题的有效算法，目前算法方面的研究已日趋活跃[75]。在我国以陈光亚、付万涛和胡毓达为首的几个研究团队在上个世纪 80 年代末 90 年代初率先开展了向量优化理论的研究，他们启动了中国的向量优化研究，也培养了中国的第一批向量优化研究工作者。30 年来我国的向量优化研究取得了丰硕的成果，这些创新性的成果在国际上也是举足轻重的。

2. 国内外研究现状分析

（1）**向量优化问题的解** 正如库恩和塔克观察到的“一些有效点有反常性质”，为了消除这样的反常性质，各种真有效性被引入，其中常用并被广泛研究的真有效性有：正真有效性、哈特利真有效性、本森真有效性、赫尼格真有效性以及博温的超有效性等。其中论文[76]在赋范空间基于范数引进的超有效性因具备很好的稳定性而备受青睐。云南大学、南昌大学和苏州大学研究团队以及国外多个学者就此做了一系列后续研究。近来，注意到闭凸集在某一点的支撑泛函集合恰是该闭凸集在对应点的法锥，云南大学、重庆师范大学和香港理工大

学研究团队使用变分几何方法通过法锥给出了赋范空间中闭集超有效点集的特征，将闭凸集超有效点集特征定理推广到了非凸情形。合理的真有效性除了能消除反常的有效点外，还应该保证对应的真有效点足够多。人们采用真有效点集在对应的有效点集中是否稠密来对之衡量。这方面的开创工作[74]证明了欧氏空间中每个紧凸集关于自然序锥的正真有效点集在对应的有效点集中稠密。随后，哈特利等人将自然序锥推广到更一般的闭凸锥，博温等人将此结果推广到了无限维空间。由于向量序的不完备性导致大量的向量优化问题无精确解，加之构造算法的需要，研究各种近似解成为向量优化解的研究的主要方向之一[77,78]。最近，古铁雷斯等定义了向量优化问题近似解的概念，统一了以往诸多近似解的概念。奇考等人以改进集为基础提出了向量优化问题的 E-有效解的概念，在一定程度上统一了有效解、弱有效解与近似有效解的概念。重庆师范大学研究团队在此基础上进一步研究，提出了无限维空间中向量优化问题的近似真有效解和统一的近似解的概念，研究了存在性、标量化特征和拉格朗日乘子理论。同时，也利用改进集进一步研究了统一的真有效解。中科院系统所、四川大学、重庆大学、香港理工大学、南昌大学、重庆师范大学和西华师范大学研究团队在向量优化问题解的刻画方面做过许多研究，取得过不少好的成果。最近，四川大学研究团队刻画了阿达马流形上向量优化问题与向量变分不等式的关系，证明了阿达马流形上向量优化问题解的存在性新结果。

(2) **逐段线性向量优化问题** 由于许多函数能被逐段线性函数逼近，因此，在经济、工程和管理等领域中，许多实际问题都通过逐段线性函数建立模型。逐段线性数值优化已被广泛研究并建立了很好的理论。与此形成对照，逐段线性向量优化的理论和算法还相当有限。在有限维和目标函数的凸性假设下，尼克尔等给出了一种求出逐段线性问题帕累托解集的方法。近来，勒费耶等提出了解逐段线性问题的不同方法，并研究帕累托解集的几何性质。云南大学研究团队与香港理工大学合作，系统地研究了逐段线性向量优化问题，并把阿罗等关于线性向量优化问题弱帕累托解集的结构理论推广到无穷维空间上的一般逐段线性向量优化问题。基于此证明了凸逐段线性向量优化问题有整体弱尖锐性质。之后杨晓琪等又建立了逐段线性向量优化问题的帕累托解集的结构定理。在此基础上，云南大学研究团队在赋范空间框架下研究了更一般的集值目标逐段线性向量优化问题，取得不少优秀成果。最近，四川大学、西南交通大学和香港理工大学研究团队建立了关于半闭凸多面体的闵可夫斯基-外尔型表示定理，证明了不连续分段线性多目标规划的解集是有限多个半闭多面体的并集，提出了一种获得两个目标不连续分段线性多目标规划问题全部解的算法，并用于求解带交易费用的两目标投资组合优化问题。

(3) **向量优化问题解的最优性条件** 向量优化问题解的最优性条件是基础性的课题，已被系统地研究。论文[81]做了进一步深入的研究，建立了各种必要条件。随着非光滑分析、变分分析和集值分析的发展，研究非光滑约束向量优化问题的必要和充分性条件成为非常活跃和主要的研究领域。云南大学研究团队和香港中文大学利用变分几何方法，就目标是一般非光滑集值映射的无约束向量优化问题使用对偶导数建立了帕累托解存在的费马准则。论文[80]使用极限法锥和对偶导数，在阿斯普伦德空间框架下深入地研究了有限个不等式和等式约束下向量优化问题的近似解，并建立了这类约束问题近似解的拉格朗日乘子准则。他们研究这类问题的变分分析方法被一系列后续研究采用。近来，人们开始注重目标函数和约束条件都由集值映射确定的集值优化问题，科利采用切导数和相依导数得到了集值优化问题的弗里茨约翰型必要以及充分最优性条件。在国内，中科院系统所、重庆大学、云南大学和香港中文大学研究团队对此问题展开了进一步研究，取得了一定的进展。与此同时，帕累托有效点(解)存在的充分性研究也取得了许多有价值的结果。其中有一部分工作是在近似锥-次似凸集值映射条件下通过建立择一定理得到的。最近，重庆师范大学研究团队以推广近似锥-次似凸集值映射为主要突破点，提出了新的广义凸函数。通过建立相应的择一定理研究了各种真有效解和近似解的标量化最优性条件。

(4) **向量优化的对偶理伦.** 向量优化问题对偶理论是非常丰富的，它在最优化理论研究的深入展开及算法的研究中都具有十分重要的作用。自论文[82]首次提出线性多目标规划的对偶模型并证明其对偶定理以来,人们主要开展非线性优化问题的对偶理论研究。相比一阶对偶问题，二阶和高阶对偶问题更具有计算上的优势。近年来，重庆师范大学研究团队主要研究多目标二阶和高阶对偶问题在广义凸性假设下的逆对偶定理；同时，进一步研究了多目标二阶和高阶对称对偶问题的对偶定理。此外，重庆大学研究团队引入了集值映射的广义高

阶相依上图导数和广义邻接相依上图导数，通过建立约束集值优化问题弱有效解和真有效解的 KT-型高阶最优性条件，建立了约束集值优化问题的高阶沃尔夫对偶问题，并在较弱的条件下，获得了相应的弱对偶、强对偶和逆对偶定理。

(5) **向量变分不等式、向量互补问题和向量均衡问题** 向量变分不等式、向量互补问题和向量均衡问题出现在很多实际问题中，而且大量的向量优化问题可以转化为向量变分不等式问题。吉安尼西首先在有限维空间引进并研究了向量变分不等式。中科院系统所研究团队进一步在无穷维空间中研究一般的向量变分不等式和向量互补问题。后来，有大量文章报告这方面的研究成果，并有多种向量变分不等式解的存在性被建立并应用于向量优化问题。向量均衡问题是向量变分不等式的推广，它以向量优化问题和向量互补问题作为其特例。向量均衡问题大量出现在交通运输网络和经济学文献中。中科院系统所研究团队率先就交通运输问题建立了向量均衡模型，并对之做了很好的研究[79]。香港理工大学研究团队对向量互补问题进行了研究；重庆师范大学研究团队研究了向量变分不等式和向量优化的等价关系；南昌大学研究团队对向量均衡问题的有效解和几类真有效解进行了研究；四川大学研究团队给出了一类微分向量变分不等式的弱解存在性，并给出了解集的上、下半连续性刻画结果。

3. 发展趋势与关键科学问题

向量优化问题的理论、方法及其应用研究态势，目前仍然处在发展和深入的阶段。其中，各分支方向研究的广度和深度呈现出明显的差异。一些方向的研究工作主要是在泛函空间理论、凸分析、变分分析和集值分析等相关交叉学科的基础上对理论研究进行完善和推广。需要正视的是，各个领域的实际问题急需我们在这方面的理论基础系统化、计算方法的实用性、适时性和有效性以及实践中的应用可行性等研究领域加快步伐。未来的研究方向和关键问题包括：

(1) 向量优化问题正真有效点集在有效点集中的稠密性研究已经相对成熟。在此基础上，可以进一步考虑其它真有效点或引进新的真有效点的概念，研究它们在有效点集中的稠密性。在非线性规划解集刻画的研究中，最近，利用标量化方法研究了凸多目标优化问题解集的刻画，但在此基础上的进一步研究还处于空白。由于数值优化问题的尖锐性或弱尖锐性可以保证对应算法具有很好的收敛性，因此有大量文献处理相关问题。但对于向量优化问题弱尖锐性的研究大多只限于局部情形，而算法分析和稳定性分析则常常需要整体弱尖锐性。因此，结合变分分析和广义方程的度量正则性，研究向量优化问题整体弱尖锐性是值得研究的方向。由于向量序的不完备性，向量优化问题有突出的奇异和反常性，从而进一步研究向量优化问题的稳定性理论和解集的连续性也是很必要的。

(2)解的最优性条件和对偶理论是向量优化的基本理论问题。在最优性条件方面，利用变分分析技术和方法，研究非光滑多目标优化问题各种解的最优性条件；在广义锥-次似凸函数的基础上引进新的广义凸函数，通过建立择一定理给出各种解的线性标量化特征；进一步研究约束品性条件下向量优化问题的最优性条件；合理引进集值映射的导数，研究集值向量优化问题的最优性条件和对偶理论。此外，像空间方法、非凸分离定理、非线性标量化和变分原理作为理论研究的工具和方法也需要进一步深入研究。特别，引进新的或统一的非线性标量化函数，进一步研究向量优化问题的标量化理论；进一步考虑广义变分原理用于研究向量优化问题解的存在性理论。此外，基于最优性条件的各种形式的对偶模型和相应的对偶理论也值得进一步探索研究。

(3) 相对于精确解，近似解的存在性无需相关集合的紧性，另外，近似解的研究更加符合实际应用的需要。这方面的主要研究是定义新的近似解，特别是近似真有效解和统一的近似解的概念，利用广义变分原理研究其存在性；利用非线性标量化函数在非凸分离定理的基础上研究标量化特征；通过建立近似择一定理研究线性标量化特征。此外，在改进集的基础上如何统一向量优化问题的精确解和近似解也是最近备受关注的研究内容。为保证向量优化问题近似解序列的收敛性，有必要进一步研究向量优化问题的适定性及其等价刻画，这对于向量优化问题的稳定性及其求解算法的收敛性有重要的意义。

(4) 建立向量优化问题的算法是相当困难的，然而为实际的多目标问题提供答案需要可实行的有效算法。这方面的研究可基于体现实际问题的偏好，设计有针对性的具体算法。另外，在有限维空间中，针对逐段线性向量优化问题或二次向量优化优化问题构造具有某种普

遍性的算法也是值得研究的重要方向。

(5)从黎曼几何的观点来看,欧氏空间中的非凸和非光滑的约束优化问题可以视为黎曼流形上的凸和光滑的无约束优化问题。近年来，国内外不少学者开展了微分流形上优化问题的研究，取得了一些重要的进展。利用非线性分析和非线性优化的技术和方法，研究微分流形上的向量变分不等式、向量互补问题和向量优化问题是值得关注的重要问题。

(6) 微分变分不等式的研究开辟了一个新的研究领域，包含了许多类型的数学问题作为特例，为许多应用问题提供了有力的模型典范。在有限或无限维空间中开展微分向量变分不等式、微分向量互补问题和微分向量优化问题的研究是有重要意义的新问题。

(7) 由于现实世界许多问题都受到随机因素的影响，随机优化问题的研究得到了广泛的关注。因此，在随机环境下研究向量变分不等式、向量互补问题和向量优化及其相关问题是很有生命力的方向。

（五）整数规划

1. 研究领域概述

整数规划是带整数变量的最优化问题，即最大化或最小化一个全部或部分变量为整数的多元函数受约束于一组等式和不等式条件的最优化问题。整数规划是数学规划的重要部分，许多经济、管理、交通、通信和工程中的最优化问题都可以用整数规划来建模。另外，许多组合优化、图论和计算逻辑问题可以归结为整数规划问题。整数规划的历史可以追溯到上世纪 50 年代，丹齐格首先发现可以用 0-1 变量来刻画最优化模型中的固定费用、变量上界、半连续变量和非凸分片线性函数等。他和福克森和约翰逊对旅行售货员问题的研究[83]成为后来分枝-割方法和现代混合整数规划算法的开端。1958 年戈莫里发现了第一个求解一般线性整数规划的收敛算法-割平面方法[84]。丹齐格-沃尔夫分解算法和列生成算法的提出使一系列交通规划调度和其他领域中的大规模整数规划问题得以求解或近似求解,并在各种应用软件和系统中实现。

整数规划问题的困难和挑战来源于两方面。首先，几乎所有的整数规划问题都是NP-难的，即使是最简单的0-1线性背包问题也是NP-难的[85]，故本质上不可能存在对一般类型的整数规划都很有效的算法（除非P＝NP）。人们也不能期望能找到与线性规划和凸规划算法类似的有效算法。整数规划的算法的有效性和表现可能与每类问题的特殊结构密切相关，需要仔细分析和利用问题的每类独特性质来设计算法。其次，人们对整数点集合和整数变量函数的理论认识有限，在数学上缺乏有力的理论和工具。特别是，定义在整数点上的凸分析理论结果与连续变量凸分析相比还非常初步。以最优性条件的刻画为例，除了极少数问题外，要给出可计算的最优性必要条件是非常困难的。

整数规划在研究和应用上的困难性还在于实际问题的规模往往超过现有算法的求解能力。尽管现成的整数规划软件如CPLEX和BARON可以求解任意线性、二次和非线性整数规划问题，但往往不能处理来源于实际问题的整数规划模型。这就要求对每类特殊问题都要设计不同的算法或需要在CPLEX中加入用户自定义的割或启发式方法。尽管存在理论上的困难性，应用领域对整数规划的需求推动它不断前进和发展，可以说，应用推动是目前整数规划发展的一个显著特征。

2. 国内外研究现状分析

整数规划的研究方向可大体分为线性整数规划和非线性整数规划两大部分，其研究方法和途径迥然不同。近年来非线性整数规划特别是二次整数规划的理论和算法研究取得了许多突破，使非线性整数规划也逐渐成为整数规划领域的研究热点。

（1）**线性整数规划** 该领域的自上世纪五十年代以来一直是整数规划研究的核心内容。上世纪八十年代出版的二本经典整数规划专著[86-87]和教材[88]，把线性整数规划的主要理论结果和算法全面而深入地总结，它们极大地推动了整数规划的普及和发展。2010年中文教材[89]对国内整数规划教学、研究和应用起了积极的作用。求解一般线性整数规划问题的算法框架主要是分枝-定界算法以及结合割平面技术的分支-割算法[84]。主流的整数规划商业软件的算法框架都是基于分枝-定界隐枚举法的。对大规模具有特殊结构的问题，分解算法也是被广泛使用的一种算法策略。目前线性整数规划的几个主要研究方向包括：线性混合整数规划的

多面体方法和分解和列生成方法及其在大规模整数规划算法中的应用。此外，基于资源和变量分解的本德型分解方法在大规模混合整数规划中也得到了广泛的研究和应用[90-91]。线性整数规划的理论基础研究。1983年论文[92]利用平面定理证明了维数固定的线性整数规划是多项式时间可解的。目前，结构线性整数规划的对称性和多面体整数集合的几何性质的研究不断深入，并开始应用于现有算法框架下，以提高减少算法搜索空间和提高算法效率。

(2) **非线性整数规划** 该领域的研究主要从上世纪80年代开始,早期的研究主要是应用驱动。特别是化工合成中有许多优化问题可以用非线性整数规划建模和求解，这导致了外逼近算法，广义本德分解方法和凸化算法的提出。非线性整数规划近年来在分子设计、参数估计、机械夹具设计、热交换网络、工程冷却问题、经济规模问题和适时制造等领域也得到了应用。与线性整数规划相比，非线性整数规划但无论从理论的系统性和算法的有效性都有很大的差距。非线性规划的研究策略和途径往往非常依赖于问题的特别结构和性质，一类问题一种算法，除分枝-定界算法框架外，尚没有比较有效的通用算法。上世纪90年代半定规划理论和相应的内点算法的发展,给二次0-1规划和多项式0-1规划的近似算法设计带来了新的思想和工具。非线性整数规划专著[93]总结了该领域的重要结果和最新进展。目前该领域有如下几个主要研究方向：非凸非线性整数规划，其热点是外逼近算法、分离割方法和各种特殊非凸函数的凸下包络的构造和逼近。一个重要问题是如何构造紧的凸逼近，从而可以设计更有效的分支－定界算法。半定规划松弛与近似算法。1995年论文[94]关于最大割问题的基于半定规划松弛的随机化方法掀起了国际上研究0-1二次规划的热潮，使半定规划松弛方法成为求解图论和组合优化中出现的0-1二次规划问题近似解的有效方法。然而，半定规划松弛方法也有其明显的缺点——内点算法无法求解大规模的半定规划问题,从而半定规划松弛方法仅适合中小规模的0-1二次规划。当前的一个课题是利用非内点方法求解半定规划问题，从而有可能给出0-1二次规划的新方法。此外,利用非线性的半定规划问题来研究0-1二次规划,这些方法都值得进一步研究。多项式规划与整数规划的关系可以从下面的性质看出：有界整数点集合可以由多项式约束表示。论文[95,96]给出了多项式规划的平方和逼近方法和半代数问题的逼近，而该逼近可以用半定规划表示，故多项式规划可以用半定规划来逼近。论文[95]证明了可以构造收敛到0-1多项式规划精确解的半定规划近似序列。然而，这个半定规划序列中的问题维数成指数增长，很难在实际计算中实现。利用代数几何的一些深刻结果和方法结合二次半定规划规划和锥优化研究0-1多项式规划是一个研究课题。

（3）**国内研究队伍现状** 国内整数规划方向的研究始于上世纪90年代，上海大学研究组开始比较系统地进行整数规划的教学和研究，培养了若干以整数规划为研究方向的博士生，研究方向包括基于填充函数法的一般整数规划方法、非线性规划对偶方法和二次整数规划，取得了不少优秀成果。清华大学研究组近年在二次整数规划对偶理论和算法方面取得了一系列优秀的成果。福州大学研究组在整数规划和组合优化及其在计算机领域中的应用方面作出了不少好的工作。近年来，复旦大学研究组与香港中文大学合作，在二次整数规划、半定规划松弛和0-1二次规划的对偶性质等方面取了不少进展，提高了国内在该领域的研究水平和影响。在多项式整数规划方面，杭州电子科大研究组和曲阜师大研究组在理论和算法方面都有出色的工作发表。此外，国内一些组合优化研究组，如中科院计算所和应用所、浙江大学、华东理工大学、郑州大学和曲阜师大等也在与整数规划相关领域作出了许多高水平的工作。近年来，华中科技大学研究组在交通规划研究中也在整数规划建模和列生成方法方面取得了许多好的结果和应用,东南大学研究组在管理科学中的整数规划建模和方法方面作出了许多出色的成果。然而，国内整数规划的研究与国际先进水平相比还有不少差距。首先，整数规划的教学和人才培养方面还很分散和薄弱。目前只有少数高校和研究单位开设整数规划的专门硕士和博士课程，以整数规划为研究方向的博士论文还偏少。2007年和2010年在曲阜师大和大连理工大学举行的全国研究生暑期学校开设了整数规划的暑期课程,对整数规划的研究和应用起到了积极的作用。其次，在研究方向上还比较单一，特别是整数规划在交通、管理科学和金融优化问题建模和算法方面的工作偏少，这方面将来大有可为。国际上从事整数规划研究课题大都与工业工程、管理科学和计算机科学等学科结合，而我国因为学科发展的历史原因，大部分学者都侧重于理论研究而忽视应用和交叉研究。可喜的是，这一现象正在改变,一些青年学者在国内不同高校积极开展整数规划理论和应用研究,如北京航空大学、同济大学、上海交通大学和上海财经大学等都有活跃的青年学者从事与整数规划相关的研究，开始在国际学术界崭露头角。

3. 发展趋势与关键科学问题

整数规划研究的总体发展趋势是朝大规模混合整数规划算法和与管理科学、计算机科学和工程领域的交叉发展。一方面，整数规划理论和算法研究正在与数学规划的其它学科相融和交叉。另一方面，由应用驱动的整数规划模型和问题要求研究者能真正帮助解决应用领域的实际问题，而现有算法往往还不能解决交通规划、生产调度、通讯和金融投资等中出现的大规模混合整数规划问题，因而研究应用领域中出现的整数规划问题具有重要的意义。未来的研究方向和关键问题包括：1）整数多面体凸包的刻画是线性整数规划理论的重要而困难的部分，由于对整数多面体的凸包的刻画能导出新的强有效不等式，从而可以构建更有效的分枝-割平面方法。2）参数具有不确定性的整数规划问题在多阶段决策时经常遇到，多阶段随机整数规划。研究随机整数规划的性质和相应的算法理论具有重要的意义，该课题与模拟仿真技术结合有望开拓有效的随机整数规划的计算方法。3）多层决策过程在管理中被广泛使用，具有离散变量的双层和多层整数规划模型能帮助政府机构和企业更好地优化决策。这类问题的关键在于如何刻画最优性条件，寻找合适方法将多层问题转化或近似转化为单层问题。4）混合 0-1 二次整数规划是一类最有代表性的非线性整数规划，也是在实际建模中最常用的非线性整数规划模型，寻找更有效的凸逼近和近似算法将能提高现有算法的速度和效率，并有希望提出处理大规模的混合 0-1 二次规划的算法。5）许多 0-1 规划问题可以归结为一个最小化线性函数带一个协正锥约束和线性约束、凸二次约束的问题。对协正锥和协正规划的研究能帮助我们理解和逼近 0-1 规划。一个可能的途径是构造有效的半定规划问题逐步逼近协正规划的解。6）最近十多年来凸优化的一个突破是提出了求解半定规划和二阶锥规划问题的内点型多项式时间算法，当线性矩阵不等式中带有整数变量时，其相应的对偶理论和算法策略值得进一步探索开拓研究。

（六）组合优化

1. 研究领域概述

组合优化研究具有离散结构的优化问题解的性质和求解方法，把组合学与图论、拟阵与多面体、网络流与连通性、近似算法与计算复杂性、计算几何等有机地结合起来，属于运筹学与计算机科学的交叉领域。组合优化为离散问题的有效计算提供了理论基础和各类方法。随着信息科学和网络技术的快速发展，特别是改变世界和人类生活方式的互联网及其延伸出来的物联网和社会网络的创新式生长，组合优化研究的模型、理论及方法愈来愈丰富。一般来讲，组合优化研究领域可分为计算复杂性理论、算法设计与分析和应用三个主要研究范畴。计算复杂性理论研究组合优化问题的困难程度和相应计算效能的极限；算法理论在复杂性的假设下致力于最有效的算法的设计和分析；而应用领域则利用算法的理论成果结合模型本身的特点去解决实际问题。组合优化问题依据其特征可以分成如下两类。一是数字化的优化问题，这类问题的刻画依赖于数量或向量值及其之间的约束。另一类是结构化的优化问题，这类问题则通过图和网络刻画元素之间的拓扑联系。以下我们通过若干典型问题来概述整个领域的研究重点和发展状况：

装箱问题是经典组合优化问题之一。该问题的研究见证了近似算法和在线算法的发展历程。经典装箱问题可以简单叙述如下：给定若干尺寸介于（0，1）之间的物品，将它们装入单位容量的箱子中，使得每个箱子所装物品尺寸之和不超过 1，且所用箱子个数最少。装箱问题与划分问题密切相关。在 P≠NP 的假设下，装箱问题不存在性能比严格小于 3/2 的近似算法。装箱问题有若干变形。最直接的扩展模型是高维装箱。当有多种类型箱子可以选择时，便得到变尺寸装箱。人们还关注装箱问题的在线模式，探讨被装物品信息不全情况下的装箱算法。一般讲，在在线的环境下，物品是逐个到达的。一旦一个物品出现，在不知道任何后续物品的信息的前提下，必须立即决定将其可行地装入某个箱子中。做出的决定不可更改。

旅行商问题是组合最优化的基本问题之一。给定一系列的点以及它们两两之间的距离，我们的任务是寻找一条最短的路径，这条路径要恰好经过每个点一次，并且最后回到出发点。1930 年旅行商问题首次作为一个实际问题被提出。卡普于 1972 年证明了旅行商问题是 NP-

难的，萨哈尼和冈萨雷斯在1976年证明了一般的旅行商问题不存在近似比为常数的多项式时间算法。为了降低问题的复杂性，我们通常考虑度量空间下的旅行商问题。在度量空间下，旅行商问题虽然仍是NP-难的，但是可以找到近似比为常数的多项式时间算法。然而，阿罗拉在1992年证明度量空间下的旅行商问题不存在多项式近似方案。旅行商问题还有更一般的形式，即所谓s-t路旅行商问题问题：给定一系列的点以及它们两两之间的距离，同时给定一个起点s和终点t，需要寻找一条从s出发到t的最短路，并且这条路恰好经过每个点一次。

斯坦纳树问题是网络设计中的基础问题，在大规模集成电路的设计中有重要的应用。具体的说，斯坦纳树问题是指在给定的赋权连通图中，将指定顶点连通成树，并使得连通费用最小。斯坦纳树问题是卡普提出的21个NP－难问题之一。斯坦纳树在不同的度量空间下有不同的变形。常见的包括欧氏平面上的斯坦纳树问题，网络上的斯坦纳树问题和直线距离下的斯坦纳树问题。

选址问题一直是组合优化领域中的热点问题之一，在仓库选择，供应链管理中有很多的应用。它是指在给定的若干位置中选择一些来建立设施使得所有顾客的需求得到满足，且总体费用最少。其中最经典的一类问题就是给定设施地址的集合和顾客地址的集合，以及设施在不同的地址的开设费用、顾客到开设设施的连接费用,目标是确定一些地址用于开设设施最终使得开设费用和连接费用之和最小。

除了各类典型问题的算法设计与分析理论外,组合优化还致力于一般问题解的结构和性质研究，并关注统一的有效算法工具的挖掘。与连续优化、图论和组合学、计算理论结合，出现了非常优美的理论方法和工具。

计算复杂性理论定量分析求解问题所需的资源（时间、空间等），研究各类问题之间在算法复杂度上的相互关系和基本性质。它是算法设计与分析的理论基础，对计算机科学和应用数学等许多相关领域产生重大深远的影响。计算复杂性理论的历史回溯到1937年理论计算机模型—图灵机的定义。60 年代哈特马尼斯等人提出时间和空间复杂性的概念、证明层级定理；埃德蒙兹将运行时间为输入规模多项式的算法称为有效的，并为包括最大权匹配在内的几个重要的组合优化问题设计了有效算法。有多项式时间上界的图灵机奠定了计算复杂性理论的基础。P和NP分别被用来表示确定型和非确定型图灵机多项式时间可解的问题类。70年代库克和卡普发现可满足性问题和其他21个著名的组合优化问题在NP问题中是非常困难的，属于 NP-完全类。NP 中的任何问题都可在多项时间内归约到 NP-完全问题。所有NP-完备问题在是否多项式时间可解的意义下是等价的[109]。从此，除了极个别的例外，每个组合优化问题都被证明要么属于P要么是NP-完备的；但是没有任何一个问题被证明既多项式时间可解又NP-完备。这使得P是否等于NP的公开问题更加受人瞩目，成为对计算机科学等许多相关学科有全面影响力的问题。20世纪90年代起，随着算法理论的发展，计算复杂性理论相应开展了更加纵深宽广的研究，揭示各计算模型间更加深刻密切的关系。具有代表性的突破如：发现PCP定理，通过概率可验证明刻画NP问题。从而基于PCP定理的近似算法不可近似性成为研究热点之一。另外随机算法的去随机化理论、零知识证明、量子计算都成为研究的亮点，推进人们对P和NP关系的理解。

多面体组合学利用多面体、线性代数等理论和方法解决组合优化问题，是组合优化算法与复杂性研究的一个非常有力的工具。一方面，多面体理论和技术的成功运用帮助设计出高效的多项式时间算法。另一方面，高效的算法通常导出问题的多面体特征和相应的最小-最大关系。这两方面紧密交织，形成多面体组合研究的鲜明特点。从20世纪60年代埃德蒙兹对匹配多面体的研究至今,多面体组合的理论和技术不仅用来证明了很多组合优化问题的多项时间可解性，还用来为不少NP－难问题设计算法。对偶理论在多面体组合中起核心作用。获得多面体完整的线性刻画以及证明组合的最小-最大关系的一个主要途径是建立相应线性系统的对偶整数性。最小-最大关系成立的充要条件通常以禁用结构的方式给出。多面体组合的一个中心任务是寻找刻画多面体的简洁的线性不等式系统,并在算法上有效的利用这些不等式解决相应组合优化问题。这通常包含三个方面：迭代的建立定义多面体侧面的不等式系统；为分离问题设计算法识别非可行解并找到分离该非可行解和多面体的超平面；设计具体的实施方案寻找问题的优良解。80年代罗瓦兹等将多面体理论和割平面方法的成功结合,发展了椭球方法。很多组合优化问题在椭球算法的帮助下获得了多项时间可解的证明。更多时候问题的难点在于：或者多项式时间内找到/判断定义多面体的不等式是不可能的（除非

NP=co-NP），或者解决分离问题是 NP 困难的。但可喜的是对于不少的难问题，多面体组合方法能给出其多面体简洁的部分线性表达，从而系统的成功解决大量困难的实例。在各类组合多面体中，拟阵多面体及其推广具有特殊的地位。对它们的研究带动了对次模函数的系统研究。次模函数具有组合的凸性，并与许多组合多面体、分离定理、最小-最大关系紧密相连。

拟阵是一个基于某个有限集合的满足一些特定公理的独立集系统，其抓住了一大类能够被贪婪算法解决的组合优化问题的结构特征。拟阵的重要性不仅在于广泛的实际应用，还在于所导出的深刻的定理和算法；它们的发展促进了算法设计、网络编码、混合矩阵论等相关方向的进步。拟阵理论诞生于 1935 年，三十多年后随着拟阵分解定理、拟阵交定理、多拟阵交定理及其相关算法的建立，拟阵和次模性成为优化界研究的重要课题；拟阵优化成为次模优化最重要的基石之一。西摩的正则拟阵分解定理给出了识别全幺模矩阵的多项式时间算法，对组合优化等学科领域产生深远影响。

半定规划是线性规划的推广。它是指变量为矩阵并要求矩阵为半正定阵的一类规划问题。利用半定规划松弛设计近似算法也是近似算法中的非常有效的技巧之一。最经典的利用半定规划设计近似算法的例子是最大割问题。分层半定规划能够给出更紧的松弛，有可能设计更好的近似算法。

2. 研究现状

装箱及其相关问题的研究从 1970 年代起取得了重大进展。论文[97]深入分析了装箱问题的若干经典算法，拉开了近似算法和在线算法研究的舞台序幕。特别是证明中权函数方法的巧妙使用，使得算法分析柳暗花明。证明了 FFD 算法的渐近近似比为 11/9，FF 算法的渐近竞争比为 17/10。越民义在 FFD 算法近似界的不等式改进中有重要贡献，不仅将常数尾项降至 1，而且大大简化了已有的证明。另外，其结果还意味着 FFD 的绝对近似比为 3/2，也就是说 FFD 算法在此意义下是最好可能的，除非 P=NP。最近 FFD 的尾项被证明为 6/9。关于 FF 算法的研究也有重要进展，其绝对竞争比与渐近竞争比相同[98]。

排序问题的研究现状在排序论的专题报告里会详细叙述。这里主要阐述排序问题的重大算法进展。以极小化最大完工时刻为目标的平行机调度问题时调度领域中最重要的经典问题。当机器为同型机或同类机时，存在多项式近似方案；而当机器为异序机时,则在 P≠NP 的假设下不存在严格小于 3/2 的常数近似比。目前最好的结果仍是二十多年前论文[99]提出的基于线性规划松弛的算法。该算法的界为 2。改进这个结果是调度领域中最为重要的公开问题之一。近年来在一些特殊情形下存在比 2 小的近似算法。在线排序算法依据工件信息释放的模式，一般来讲，有三种不同的在线问题：列序释放、时序释放以及依序释放。论文[100]提出了竞争比近似方案的概念，该近似方案逼近的是问题的“最佳竞争比”。在此框架下论文针对若干时序释放的在线调度问题，在机器数目为常数的情况下，设计出相应的近似方案。

旅行商问题的度量型，1976 年论文[101]提出近似比为 3/2 的近似算法。这是目前为止最好的求解度量旅行商问题的算法。对于度量 s-t 路旅行商问题，论文[102]借用论文[102]的算法思想得到了近似比为 5/3 的近似算法。这个近似比一直到 2012 年才被论文[103]改进到 1.618。最近的论文[104]进一步将该算法推广到 T-巡回问题，并证明近似比至多为 1.6。

选址问题无容量限制时是 NP-难的。对其设计精确的算法在计算时间上不能得到保证，而研究特殊情形又不能体现问题的一般性，因而大多数研究集中于近似算法。第一个常数近似比的算法由论文[105]得到。他们通过引入过滤参数，将分数最优解舍入成整数解，并分析得到算法得到的解不超过整数最优值的 4。如果均匀随机选取过滤参数，期望意义下的近似比为 3.16。论文[106]利用分数最优解，非均匀随机选取过滤参数，并结合对偶的拟合的结果得到近似比为 1.488。这是目前已知最好的近似算法结果。在一定复杂性的假设下，无容量限制设施选址问题近似比的下界为 1.463；2－层设施选址问题的下界为 1.539，k－层设施选址问题的下界为 1.61。中值问题最近也取得了一些新的结果，论文[107]证明了当设施个数不超过 k 加上某个常数，对解的质量影响不大，从而将近似比改进 3.733.

斯坦纳树问题最早的近似算法是简单的通过找到终端的最小生成树得到的 2-近似算法。论文[108]提出了在最小生成树的基础上贪婪地增加斯坦纳点的组合算法，并得到了 11/6 的近似比。现最好的斯坦纳树的近似比是论文[109]利用斯坦纳树和 k-斯坦纳树问题的间隙很小，建立了新的 k-限制斯坦纳树问题的模型，第一次利用线性规划舍入的技巧得到了 1.39-

近似算法。连通斯坦纳树问题是将斯坦纳树问题和设施选址两类重要的组合优化中的问题结合起来。设施除了需要被开设用以对顾客提供服务以外,所有开设的设施还需要被当做终端进而利用斯坦纳树连通。连通斯坦纳树问题是需要找到开设设施的集合并构造开设设施的斯坦纳树最终使得开设费用，连接费用和连通费用总和最小。论文[110]给出了一个 4-近似算法。

半定规划松弛算法 论文[111]首次利用半定规划舍入技巧给出了最大割问题的 0.87856-近似算法，引起了国际上利用半定规划设计近似算法以及探讨半定规划的局限性的研究热潮。论文[112]证明了:如果惟一博弈猜想成立，则简单的半定规划给出所有约束满足问题的最好近似比。论文[113]引入了更紧的分层半定规划来研究多项式优化问题和多项式 0-1 整数规划。最近，论文[114]利用分层半定规划的性质，对极大平分割问题设计了基于分层半定规划舍入的 0.85-近似算法，论文[115]同样利用分层半定规划舍入技巧进一步将近似比改进到 0.8776.

计算复杂性研究中除了发现更多的组合优化问题是 NP-难以外，基于 P≠NP 或惟一博弈猜想的假设，很多组合优化问题的不可近似的下界被证明或改进。NP-难的组合优化问题在近似类的细分的框架下得到了越来越深入的理解。与此同时，随着人们对困难问题的精确算法和近似算法的不断尝试，出现了新的更强的复杂性假设，其中一个比较基本的是“指数时间假设”。该假设给出 3-可满足问题精确算法计算复杂度的指数下界。在此假设下，可以推导出若干重要组合优化问题的精确算法和多项式近似方案的复杂度下界,从而证明已有算法的复杂度的某种最优性。

多面体理论 组合优化中很多著名的结果和猜想意指某些线性系统是全对偶整数的或者是盒式全对偶整数的。近年来，对偶整数性的研究在复杂性、方法工具和特殊系统的刻画方法有可喜的突破。识别线性系统对偶整数性的计算复杂性曾是一个有 20 多年历史的公开问题。它在 2008 年得到了解决：对偶整数系统及盒式全对偶整数系统的识别问题被证明是 co-NP 完全的。这一突破引发了相关后续研究。除了经典的矩阵全幺模性质，超图的等子划分性质成为证明装填/覆盖类型的线性系统盒式全对偶整数性的一个新的统一的工具。大量研究致力于刻画特殊线性系统的对偶整数性。除了由对偶整数性刻画所导出的最小-最大关系外,近年来人们建立了一系列装填/覆盖类型的最小-最大定理并设计了相应多项时时间的近似算法。

拟阵结构研究中,围绕良拟序猜想展开的一系列工作试图将罗伯逊和西摩的图缩微的结果与方法推广到拟阵上；另外，拟阵的连通性、禁用缩微和分解的研究也进一步深入。图的树宽的概念和方法被推广到拟阵上，使得树分解和枝分解一起成为拟阵优化有力工具。

组合优化的应用包括芯片设计、交通与通讯网络设计、生产与车辆调度、排样与场地调度、投资组合、蛋白质结构预测、社会网络等等。我国组合优化的应有也有不同程度的发展,包括计算机排样、钢铁企业过程调度、码头集装箱调度、城市交通线路设计、传感器网络设计以及物流配送优化等。

研究团队现状 国际上组合优化的研究队伍集中在各个大学的计算机系、数学系以管理科学系。在几乎所有著名的学校里均有很强研究团队。组合优化理论研究与应用开发整体领先的国家包括美国、德国、荷兰和加拿大。国内组合优化的集中发展起源于上世纪 80 年代。在越民义、管梅谷等的带动和促进下，在北京、上海、山东、浙江、河南和福建等形成了组合优化的研究团队。研究工作涵盖组合优化的各个领域，比较突出的成果出现在装箱、排序、选址和斯坦纳树等问题的算法设计与分析，以及计算复杂性、拟阵和多面体组合中的对偶整数性等理论体系上的研究。

3. 研究发展趋势与关键科学问题

组合优化扎根于信息科学与技术的土壤，沐浴在数学理论与方法的阳光下。在信息与网络时代将会涌现更多的组合优化问题，为组合优化理论和方法的研究提出挑战。人们逐步从简单的 P 和 NP-难的两极划分回到算法的精度与代价之前平衡的根本问题上。一方面，研究实用的精确算法，保证算法的最优性，同时尽量降低指数复杂性，即使问题本身是 NP-难的；另一方面，设计快速的近似算法，如线性时间算法，使得解的精确度尽量高，即使问题本身是多项式可解的。这就促使人们从更细的角度探讨问题的计算有效性。复杂性思想、多面体

理论和统计方法将显现出更大的作用。不完全信息下的组合优化问题更具实际意义。经过一段时间的停顿，相信该领域将会产生新的思想和方法，使得在线和离线算法的内在的本质联系得到深入的挖掘。下面将列出若干具体的关键研究课题，这些只是众多有趣问题的很少一部分。此外，更为重要的是加强组合优化的应用研究，形成依赖于理论和方法创新的应用平台，服务社会。1）装箱问题的绝对近似算法的存在性。常数个不同类型物品下多项式时间最优算法的设计。2）针对极小化最大完工时刻，异序机排序的严格小于 2 的近似算法；自由作业排序比 2-近似的贪心算法更好的近似算法。3)改进度量旅行商问题的 3/2-近似算法。4）网络上斯坦纳树近似算法的改进；欧氏平面上斯坦纳比猜想的证明。5）带惩罚的斯坦纳树问题中,利用非均匀随机选取参量从而改进近似比。6)改进无容量设施选址问题的上下界。7)连通设施选址问题综合的设施选址问题和斯坦纳树问题的两类特色,将二者有机结合起来设计出统一的算法。8）对带硬容量限制的设施选址问题，给出整数间隙为常数的线性规划松弛。9）理解分层半定规划舍入技巧的本质,应用到其它 NP-困难问题上。10）利用分层半定规划研究某些 NP-困难问题的精确算法复杂性的上下界。11）利用和发展 ETH 假设下的算法复杂性研究，给出数字化组合优化问题的算法界。12）发展不完全信息下的算法理论，逐步建立相应的复杂性体系。特别是研究在线问题的竞争比近似方案，使得经典的在线问题有所突破。

（七）张量分析与多项式优化

1．张量分析

张量虽然早在 19 世纪微分几何的研究中就被引入，但这里的张量主要是指高维数据的一种排列及它们在高阶数理统计、信号处理、图像处理、化学计量等领域中的含义，它可以被看成是矩阵的一种推广，和微分几何中张量的含义及着眼点不同[116]。张量分析包括张量分解和张量特征值问题，其内容包括二类问题的理论和算法，矩阵分解和矩阵特征值问题是张量分解和张量特征值问题的出发点和研究范本。

张量分解最初由希契科克在 1927 年提出，到上世纪 60-70 年代，越来越多的研究者开始在各自研究领域使用张量，其主要研究的问题是张量分解。张量及其分解的早期研究人员主要来自心理测量、化学计量等数学领域以外的实用部门。随着这些学科的发展及更多的领域对张量及其分解知识的进一步需求，深入而系统的理论研究显得越来越重要，并逐渐引起数学家，特别是应用数学家的重视。2009 年专著[117]详细介绍了张量分解中的各种概念及运算规则，各种非负矩阵和非负张量分解及它们在脑科学、盲源分离等领域中的应用，并介绍了几种经典的非线性优化方法。

目前，张量分解在心理统计学、化学计量学、信号处理、数值线性代数、计算机可视化、数值分析、图的分析、生物信息等领域中有重要应用。正如矩阵分解和逼近那样，之所以需要研究张量的分解及逼近，一方面是希望通过分解，能从大量的数据中得到对表征对象特点的刻划，另一方面，通过张量低秩逼近，可以缓解处理海量数据在存储、传输、分析等方面的压力，以便既能够比较准确又能够高效地处理各类数据。2005 年论文[118,119]分别独立提出了张量特征值与特征向量的概念，这个概念可以被看成是矩阵特征值与特征向量的推广。起初这两个工作都是针对实张量情形定义的特征值、特征向量。后来，人们对特征值、特征向量给出了一般的定义，随后张量特征值的理论及应用得到了快速发展。

尽管已有各种计算塔克分解的方法，但算法的理论分析十分缺乏，其中一种较为得到认可的算法是交替最小二乘法, 这类算法和解矩阵的交替最小二乘法、可分凸优化问题和可分变分不等式中的交替方向法在思想上和算法步骤上类似。在张量分解和最佳低秩逼近中，往往采用二类处理方法。一类是直接法，这类方法主要借助矩阵理论中已有的结论和方法，得到关于张量分解的结论；在最佳逼近问题中，常采用非线性最优化中的迭代算法，一般是结合问题的具体特点，得到相关的算法，如交替方向法。

从上世纪 70 年起，张量分解、逼近及其在各领域中的应用研究在国外开始得到重视，并有较快的发展，已经取得了十分丰富的结果。相对而言，国内这方面的研究还处于起步阶段，为数不多的研究工作主要集中在用优化的方法对张量秩 1 最佳逼近等方面所做的理论研究。张量特征值与特征向量的定义主要有如下二种：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=\lambda\boldsymbol{x}^{m-1}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=\lambda\boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{x}\|_2=1$。论文

[120，121]讨论了 H-特征值的个数及所有特征值的和、积、重数、特征值在正交等变换下的不变性、圆盘估计等结果，并利用结式理论研究了齐次张量特征值的个数等。作者还研究了张量特征值在偶数阶张量的正性、医学图像、量子纠缠、弹性力学、控制论等领域中的应用。论文[119]利用变分方法引出了张量特征值、奇异值的定义并定义了张量的不可分性及非负不可分张量的初步结果。相对来说，Z-特征值的应用背景更明确，但由于其非齐次性，导致对H-特征值的多数结论对 Z-特征值不成立。对称情形的最大 Z-特征值模的计算可以归结为单位球面上张量函数全局最大值的计算，双二次张量函数最大奇异值的计算可以归结为二个单位球面约束的张量函数全局最大值的计算。这里的优化问题是特殊的多项式优化问题，均是非凸或非凹，因而是 NP-难问题。

张量特征值的理论、算法及应用主要是由祁力群等提出并发展起来的，除了他们开拓性工作，国内研究队伍及做的研究工作大致如下：北京大学研究组在非负张量特征值\奇异值的性质及算法方面做出了很有意义的工作，南开大学研究组在非负张量特征值\奇异值的性质，几类特殊张量优化的近似求解方面做出了有意义的工作，天津大学研究组在张量分类、最大特征值计算和最佳秩 1 逼近方面做出了重要工作，清华大学研究组在求非负张量最大H-特征值幂法的线性收敛性方面做出了有意义的工作，四川大学研究组在微分几何中张量性质方面进行了有益的探讨，曲阜师大研究组在张量特征值的性质及特征值的计算方法及特殊多项式优化方面做出了重要工作，杭州电子科大研究组在张量优化问题的半定规划松弛和最佳秩 1 逼近方面做出了重要工作，赣南师院研究组在图像处理的张量方法方面做出了有意义的结果，福州大学研究组在张量特征值在超图中的意义及应用方面做出了有意义的研究工作，南京师大研究组在张量的应用及张量分解的交替方向法方面做了有益的探讨，华南师大研究组在张量特征值模型和解法方面做出了有意义的工作。

研究发展趋势与关键科学问题包括：（1）张量可能会进一步渗透到压缩感知、矩阵完备化、图的谱理论等问题的研究中。在这些问题的研究中，用张量代替矩阵是模型中的主要变化。这种推广有什么优点，及研究新的模型时遇到的新问题，都是需要研究的。（2）张量分解、逼近及最大Z-特征值或其他类型的特征值的计算应该会越来越多地使用多项式优化、非线性分析中的结论和方法，特别是这里遇到的非线性优化问题的全局最优解的计算，属于多项式优化中需要研究的重要问题。（3）张量的秩有好几种定义，且这几种定义的值一般是不同的。这是和矩阵情形有重要区别的地方。每一种定义的含义和特点，彼此之间的关系，秩的估计和计算是需要进一步研究的问题。（4）进一步研究求解更多特征值、特征向量的方法，在一些具体问题中特征值、特征向量的含义也是有待进一步研究的。

2. 多项式优化

多项式优化是指目标函数和约束函数均为多项式的一类特殊的非线性规划问题，由于多项式优化问题的 KKT-条件仍然为一个多项式系统，因此，多项式优化问题的研究也包括多项式方程组问题[122-123]。多项式优化的研究历史可追溯至希尔伯特于 1900 年在巴黎召开的第二届国际数学家大会上提出的第 17 个问题, 即非负多项式与有理多项式的平方和的等价性讨论。当时，他猜想，任何一个实的非负多项式都能表示成有理多项式的平方和。1927 年阿廷证明该猜想成立。为建立一个实的非负多项式的有理多项式的平方和的表达式，德尔泽尔给出了一类构造性算法。

多项式优化不仅在非线性规划问题中有基础性应用，一些混合整数规划也可转化成多项式优化模型，而且经济、管理、交通、通信和工程中的大量实际问题都可以用多项式优化来建模。因此, 多项式优化问题的研究不但吸引了许多优化研究学者的兴趣, 而且也引起了一批从事代数学研究学者的注意。他们分别从理论分析和数值计算等角度对该问题展开研究, 取得了一系列重要研究成果。另外，从量子力学和医学成像中提炼出的多项式优化问题属于一类特殊的齐次多项式优化问题。基于齐次多项式优化与张量计算之间的密切关系，人们对这类多项式优化问题进行了系统研究，得到很多有意义的结果，如张量的低秩逼近和分解等。

多项式优化问题一般是非凸的，因此在多数情况下是 NP－难的，甚至在单位球上的齐次多项式极值问题也是如此。所以，要得到多项式优化模型的全局最优解是非常困难的。对于多项式优化问题, 早期的研究工作多是基于代数学的格欧伯纳基和结式理论来寻求一个多项式优化问题的所有临界点，从中寻求问题的最优解。这类算法的缺陷是计算量太大, 它

只适用于稀疏和低维问题。但对于超图谱理论、高阶数理统计、复杂网络设计、多板块金融投资中的多项式优化模型，由于所涉及的多项式往往重数或次数较高，问题的规模较大，因此这种格欧伯纳基和结式算法难以执行。

多项式优化问题的重要性及其在理论和算法设计上的困难成为推动多项式优化研究不断发展的动力。作为非线性优化的特殊情形，设计求解其全局最优解的近似算法成为优化研究者的主要任务。特别是，结合实际背景而提出的模型特殊结构，研究全局最优性条件并设计更为有效的近似算法成为多项式优化研究的主要内容之一。

国内外研究现状分析 多项式优化的研究大致分为连续型和离散型两类，有时根据实际问题需要又包含分离出混合型多项式优化模型。不论是连续型还是离散型二次规划，由于其在非线性规划中的独特地位和在许多实际领域的广泛应用而受到特别关注。近年来，高次多项式优化问题特别是具有特殊结构的齐次多项式优化问题的理论和算法研究取得重要进展，齐次高次模型也成为多项式优化领域的研究热点之一。

对于多项式优化问题，一个很自然的想法是使用已有的非线性规划方法求解。但由于多项式优化问题的特殊性，特别是问题的规模往往非常大，直接用这些方法来求解一般效率很低. 多项式优化问题的另一直接的解法是借助最优性条件将其转化为一个非线性方程组问题，然后设计求解方法。但在问题的规模很大时，这类方法计算量大的缺陷便凸显出来.

单位球面约束的齐次多项式优化模型是一类特殊的多项式优化问题，此模型中的多项式目标函数次数可能相对较高。这类模型在材料科学、统计学中有广泛应用，也是高阶张量特征值与特征向量概念的优化模型再现，正如前一部分所说，高阶张量低秩逼近与分解问题也可以表示为单位球面约束的齐次多项式优化模型。对这种特殊结构的多项式优化问题，祁力群等通过引入张量特征值给出了一个循环递进的求解算法。针对从证券投资组合问题提出的一类非凸多项式优化问题，路斯腾等提出了一类扩散求解方法；而对于多项式整数规划问题，一个比较有效的技术是将其转化为最大全中的独立集问题。

对于连续型多项式优化问题，一个比较流行的技术是将其松弛成一个可以在多项式时间内近似求解的凸优化模型。由于半定规划问题有许多类似于线性规划的特征与性质，在适当的约束规格下，强对偶定理成立。这些性质成为设计各种求解半定规划模型有效算法的理论基础。上世纪 90 年代，阿里扎德等人分别独立地提出了求解半定规划模型的内点算法。这为多项式优化问题的求解提供了方便。半定规划内点算法不仅使半定规划模型在理论上更为重要、实际应用也更为广泛。由于半定规划模型在理论上多项式时间可解，也有一些有效的算法，能以此用来得到许多整数规划和全局优化中难问题的紧逼近，所以在控制论、线路设计、传感网络定位、主成份分析等许多领域有广泛应用。同时也为近似求解多项式规划特别是非凸二次规划等 NP－难问题提供了一个极为有效的途径。

多项式优化问题的另一种常见技术是基于非负多项式和多项式的平方和之间的关系而建立的平方和方法。该方法主要通过对原多项式优化问题进行松弛得到序列半定规划问题使其最优值单调收敛于原问题的最优值。从理论上讲，平方和方法可以求解任何多项式优化问题并达到所要求的计算精度。对于一元多项式优化问题，涅斯捷罗夫证明平方和方法在多项式时间内可以得到问题的最优解。该结论同样适用于无约束的可以表示成平方和形式的多元二次多项式和二元四次多项式优化问题。

对于一般的多项式优化问题, 肖尔等通过某种转换将其转化为一个目标函数和约束函数均为二次多项式的优化问题, 然后通过松弛技术再将该问题转化为一个标准形式下的凸线性矩阵不等式问题。利用现成的算法可以在较短的时间内得到原问题最优值的一个下界。为使得到的下界更接近原问题的最优值, 需要在中间转换的多项式优化问题中增加二次约束函数。该类方法后来通过结合平方和方法被进一步改进。

尽管并非所有的非负多项式都能表示成多项式的平方和, 但这类方法在实际计算过程中非常有效。平方和方法与半定规划问题密切相关，作为其变种, 拉塞尔等通过矩矩阵建立了多项式优化问题的半定规划问题的转化形式, 并通过半定规划问题的最优值序列来界定原问题的最优值，以达到所想要的精度。平方和方法需要求解半定规划问题，所以在问题的规模较大的时候，该算法变得不再实用。

用矩-平方和方法有时可在有限步内得到多项式优化的全局最优值，而且有比较好的理论性质和数值效果。但由于求解过程中需要计算的半定规划问题的规模关于原问题中的变量维数和多项式的最高次数成近似指数函数，因此也只能用来计算规模较小或具有特殊形式的较大规模多项式优化问题，而且要得到原问题的最优解有时需要对中间问题增加新的约束重新计算，从而导致计算量的陡增。这成为制约多项式优化发展的一个瓶颈。

对于张量形式的多项式优化，由于算法的计算量与张量的阶数呈指数增长，为减少每一迭代步的计算量，人们使用交替优化方法或分层技术求解。对于偶齐次多项式优化问题，引进平移技术可在一般情况下建立幂法的全局收敛性，但该方法的计算效率有待提高。

基于上述分析，人们从另外一个角度对该问题展开研究：寻求多项式优化问题的近似解。针对最大割问题中的二次规划模型，论文[124]使用松弛方法得到原问题的 0.878 近似比算法。随后，这一重要思想相继被许多学者推广到更一般的二次规划情形。特别地，对于“1，-1”约束下的半正定二次多项式优化问题，涅斯捷罗夫得到 0.636 近似比算法。这些近似算法是迄今为止最有效的算法。

在以上所涉及的近似算法中，目标函数均是二次的。而对于次数较高的多项式优化问题，其近似算法的研究仍处于起步阶段。针对具有简单约束的特殊形式高次多项式优化问题，德克拉克等给出了首个近似算法。随后，班诺克等推广了该方法，对定义在单位球面上的多项式优化问题，给出了一类新的近似算法。对定义在多个椭球的交集上的四次多项式优化问题，将其松弛成二次半定规划问题，并进一步通过线性化方法建立了有效算法。林等也提出了双二次齐次函数在两个球面约束下的最优化模型，通过将其松弛为双线性半定规划模型给出了近似算法，其近似比值与中结果相当。林和张等又通过双线性半定规划考虑了带二次约束的双二次多项式优化问题，给出了多项式时间的近似算法。此外，张等考虑了单位球面上的三次齐次多项式优化问题，并给出了近似度估计。对于任意次齐次多项式优化在多个二次约束下的近似算法的突破来自于何等人的工作，他们首次提出了张量松弛的方法，通过将齐次多项式松弛为多重线性函数并建立其中的桥梁来处理一般的齐次多项式，给出了相应的近似算法。后来，何等又对定义在任意闭凸集上的非齐次多项式优化问题给出了多项式时间的近似算法，这是目前多项式优化近似算法研究中唯一能处理任意次非齐次多项式的研究结果。此后，索又采取计算几何与张量松弛相结合的方法，对球面约束下齐次多项式优化问题提出了新的近似算法，提高了近似比值。此外，何等还考虑了整数多项式优化问题和混合多项式优化问题。有关多项式优化问题的近似算法最新发展，可参考专著[123]。

近来，从对偶角度对多项式优化问题最优值界的研究也逐渐兴起。与近似算法不同，这类方法只能给出最大值问题的上界或最小值问题的下界，也不能得到近似解。但所用方法都是基于平方和松弛分析。从实用角度来看，如果对于某个特殊的多项式优化问题例子，此类估计恰好能达到近似算法的界，也就相当于找到了此问题的最优解。

除了连续型的多项式优化模型，决策变量仅取离散值的多项式优化模型也是一类被广泛应用和研究的多项式优化问题。这类多项式优化模型不仅在图论而且在神经网络、代码纠差等研究领域有广泛应用。离散决策变量的二次规划和双线性模型已被广泛研究，尤其是离散决策变量的二次规划模型，由于其与各种图划分问题密切相关而被深入研究。自然地，离散决策变量的高次齐次多项式优化和多重线性优化模型都是值得研究的问题。

求解多项式优化问题软件目前相对较少，且早期的软件大都基于平方和松弛方法并借助半定规划的求解算法编写而成，因此只能解决较小规模的多项式优化模型。但是，随着计算机、高速网络的不断发展与并行计算技术的不断开发，求解较大规模特别稀疏的半定规划模型成为可能。

研究发展趋势与关键科学问题 多项式优化问题是一类特殊的数学规划问题。一方面，它与连续优化、离散优化、凸优化等数学规划的其它分支融合与交叉；另一方面，它在理论上又与代数几何、交换代数、矩理论等纯数学领域有着密切联系，内容相当广泛。我们将从理论、算法与应用三个方面简要叙述该领域今后发展的若干趋势和重要问题。

（1）理论方面 基于矩理论的平方和方法的进一步研究和多项式锥性质分析等将成为关键研究问题。目前，基于拉塞尔等级分解的平方和方法在多项式优化理论研究中占有主导地

位，这也将是多项式优化理论研究的一个重要发展方向，其主要内容包括：拉塞尔等级的有限收敛分析，聂对此已做了一些初步的工作；某些特殊多项式优化问题的平方和方法对称性研究；逆多项式优化问题。线性锥优化特别是半定规划在许多领域中的应用已非常显著。自从伯格证明一大类非凸的二次规划问题可以等价转换为双正锥规划后，对于双正锥本身的研究已引起重要关注，进一步引发了对一些“难锥”的研究。姜等研究了非负四次型锥，并证明一大类四次非齐次多项式问题亦可等价转换为线性四次型锥规划问题。与一般的非负二次型锥不同，非负四次型锥研究内容远比二次型锥丰富。目前，相关研究仅处于初始阶段。最近，艾哈迈迪等证明了判别一般四次多项式的凹凸性是强 NP-难的。这些初步研究表明，对于高次多项式锥的理论研究非常重要，它将是推动多项式优化理论发展的重要课题之一。探析一般形式或具有实际背景且特殊结构的多项式优化问题的全局最优解的结构性质和判定准则。这类问题的研究结果还不是很多，也是多项式全局优化的重要内容之一。

(2) 算法方面 多项式优化问题的全局最优算法设计是一个非常难的任务。目前，虽有许多不同类型的算法，但总体来说尚不完备。进一步的有效的算法研究将是今后多项式优化研究最主要、根本的任务之一。目前，算法设计研究的热点方向包括：实用的快速算法设计、更高近似比的算法设计以及基于平方和的特殊结构的多项式优化方法研究等。目前，已有的算法设计研究大多是平方和方法和近似方法，二者都有不足。在计算张量最大特征值的多项式优化问题中，交替最小二乘法和最大分块改进法非常有效。最近，尤舍梅宙证明交替最小二乘法用于张量分解具有线性收敛性。如何根据模型的特有结构，寻求快速有效的算法或者局部改进的方法将是今后多项式优化算法设计的一个重要研究方向。平方和方法虽然有其局限性，但如何在充分利用所考虑模型的对称性和稀疏性的基础上，与平方和方法结合，设计可进行大规模计算的算法依然是一个有希望的发展方向。另外，如何基于平方和的几重松弛方法研究所考虑问题最优值的界也是平方和算法近几年研究的热点。此算法可以被认为是近似算法的互补，它和近似算法所获得的近似值分别构成了原问题最优值的上下界。近似算法是多项式优化算法研究的热点之一。首先，现有近似算法所研究模型的约束条件大都较为简单或具有某种对称结构。如何针对更一般多项式不等式约束下的多项式优化问题，设计近似算法将是值得挑战的问题。其次，现有近似算法所获近似比值仍不太好。虽然在实际计算中某些算法表现出远比其理论近似比值好的效果，但如何改进所设计算法的近似比值仍将是近似算法设计研究中最为重要的问题。最近，何等人和侯等人分别改进了一大类齐次多项式优化问题近似算法的近似比值，但还是没能突破一个核心问题的瓶颈。简单地说，就是单位球面约束下三次齐次多项式最大化问题的近似比值能不能超过 $\Omega[(\ln n/n)^{0.5}]$。这涉及到另外一个目前在近似算法研究中一直没能获得突破的难题，即不可近似逼近的结果，这个问题，有待进一步研究

五、 小结

数学规划或最优化是运筹学的一个重要分支，也是运筹学与管理科学中的主要建模工具和方法论。数学规划在工程、管理、经济和金融等领域有广泛和深入的应用。本章我们首先介绍了数学规划问题、历史背景和研究现状，然后对我国数学规划的发展进行了简要概述并提出了一些重要的研究问题和研究趋势。本章重点介绍了如下七个主要数学规划研究方向：线性与非线性规，锥优化和鲁棒优化，变分不等式和互补问题，多目标优化和向量优化，整数规划，组合优化，张量分析与多项式优化。对每一个研究方向，我们分别介绍了研究方向概述、国内外研究现状分析和研究发展趋势与关键科学问题。我们希望本专题的内容能对我国数学规划未来的发展规划有一定的指引参考价值，也能对数学规划的理论和应用工作者了解该领域的背景和研究现状有所帮助。

参考文献

[1] 石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 37:1070-1081, 2009.

[2] 许志强. 压缩感知 [J]. 中国科学：数学, 42:865-877, 2012.
[3] 文再文, 印卧涛, 刘歆, 张寅. 压缩感知和稀疏优化简介 [J]. 运筹学学报, 16:49-64, 2012.
[4] E. Tardos. A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programming [J]. *Operations Research*, 34:250-256, 1986.
[5] S. A. Vavasis and Y. Ye. A primal-dual interior point method whose running time depends only on the constraint matrix [J]. *Mathematical Programming*, 74:79-120, 1996.
[6] Y. Ye. The simplex and policy-iteration methods are strongly polynomial for the Markov decision problem with a fixed discount rate [J]. *Mathematics of Operations Research*, 36:593-603, 2011.
[7] S. Chubanov. A strongly polynomial algorithm for linear systems have a binary solution [J]. *Mathematical Progamming* 134:533-570, 2013.
[8] A. R. Conn, K. Scheinberg and L. N. Vicente. Introduction to Derivative-Free Optimization [M]. *MPS-SIAM Series on Optimization*, 2009.
[9] A. A. Ribeiro, E. W. Karas and C. C. Gonzaga. Global convergence of filter methods for nonlinear programming [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 19:1231-1249, 2008.
[10] N. I. Gould and P. L. Toint. Nonlinear programming without a penalty function or a filter [J]. *Mathematical Programming,* 122:155-196, 2009.
[11] X. W. Liu and Y. Yuan. A sequential quadratic programming method without a penalty function or a filter for nonlinear equality constrained optimization [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 21:545-571, 2011.
[12] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martinez, and M. L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification [J]. *Mathematical Programming,* 111:5-32, 2008.
[13] R. Andreani, J. M. Martínez, and B. F. Svaiter. A new sequential optimality condition for constrained optimization and algorithmic consequences [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 20:3533-3554, 2010.
[14] R. H. Byrd, F. E. Curtis and J. Nocedal. Infeasibility detection and SQP methods for nonlinear optimization [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 20:2281-2299, 2010.
[15] J. F. Yang and Y. Zhang. Alternating direction algorithms for ℓ1-problems in compressive sensing [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33:250–278, 2011.
[16] T. Goldstein and S. Osher. The split Bregman method for 1-regularized problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2:323–343, 2009.
[17] D. Han and X. M. Yuan. A note on the alternating direction method [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155:227–238, 2012.
[18] B. S. He, L. Liao, D. Han, and H. Yang. A new inexact alternating directions method for monotone variational inequalities [J]. *Mathematical Progamming,* 92:103–118, 2002.
[19] B. S. He, M. Tao, and X. M. Yuan. Alternating direction method with gaussian back substitution [J], 3:247 -260, 2013.
[20] B. S. He and X. M. Yuan. On the *O(1/n)* convergence rate of douglas-rachford alternating direction method [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50:700–709, 2012.
[21] M. Hong and Z-Q. Luo. On the linear convergence of the alternating direction method of multipliers [R], arXiv:1208.3922, 2013.
[22] X. W. Liu and J. Sun. A robust primal-dual interior point algorithm for nonlinear programs [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 14:1163-1186, 2004
[23] X. W. Liu and Y. Yuan. A null-space primal-dual interior-point algorithm for nonlinear optimization with nice convergence properties [J]. *Mathematical Programming,* 125:163-193, 2010.
[24] A. Nemirovski. Advances in Convex Optimization: Conic Programming [C]. Volume I (Plenary Lectures) of International Congress of Mathematicians, Madrid, European Mathematical Society, 2006.
[25] A. Ben-Tal, L.E. Ghaoui and A. Nemirovski. Robust Optimization [M]. Princeton University Press, USA, 2009.
[26] J. F. Bonnans and C. H. Ramirez. Perturbation analysis of second order cone programming problems [J]. *Mathematical Programing,* 104:205-227, 2005.
[27] J. Outrata and D. F. Sun. On the coderivative of the projection operator onto the second order cone [J]. *Set-Valued Analysis,* 16:999-1014, 2008.
[28] C. H. Ramirez and J. Outrata. On the Aubin property of perturbed second-order cone programs [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 21:798-823, 2011.
[29] D. F. Sun and J. Sun. Lowner's operator and spectral functions in Euclidean Jordan algebras [J]. *Mathematics of Operations Research,* 33: 421-445, 2008.
[30] D. F. Sun. The strong second order sufficient condition and constraint nondegeneracy in nonlinear semidefinite programming and their implications [J]. *Mathematics of Operations Research,* 31:761-776, 2006.
[31] Z. X. Chan and D. F. Sun. Constraint nondegeneracy, strong regularity and nonsingularity in semidefinite programming [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 19:370-396, 2008.
[32] H. D. Qi and D. F. Sun. A quadratically convergent Newton method for computing the nearest correlation matrix [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* 28:360-385, 2006.
[33] D. F. Sun, J. Sun and L. W. Zhang. The rate of convergence of the augmented Lagrangian method for nonlinear semidefinite programming [J]. *Mathematical. Programming***,** 114:349-391, 2008.
[34] X. Y. Zhao, D. F. Sun and K. C. Toh. A Newton-CG augmented Lagrangian method for semidefinite programming [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 20:1737-1765, 2010.
[35] Y. Gao and D. F. Sun. Calibrating least squares covariance matrix problems with equality and inequality constraints [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* 31:1432-1457, 2009.

[36] C. Ding. An Introduction to A Calss of Matrix Optimization Problems [D]. PhD thesis**,** University of Singapore, 2012.
[37] D. Bertsima, K. Natarajan and D. P. Teo. Probabilistic combinational optimization, moments, semidefinite programming and asymptotic bounds [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 15:185-209, 2004.
[38] D. Bertsimas, K. Natarajan and C. P. Teo. Persistence in distance optimization under data uncertainty [J]. *Mathematical Programming,* 108:251-274, 2006.
[39] P. Du Val. The unloading problem for plane curves [J]. *American Journal of Mathematics*, 62:307-311, 1940.
[40] R.W. Cottle. Nonlinear Programs with Positively Bounded Jacobians [D]. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1964.
[41] P. Hartman and G. Stampacchia. On some nonlinear elliptic differential functional equations [J]. *Acta Mathematica***,** 115:153-188, 1966.
[42] H. V. Stackelberg, Marktform und Gleichgewicht. The Theory of the Market Economy [M]. Oxford University Press, 1952.
[43] J. Bracken and J. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints [J]. *Operations Research*, 21:37-44, 1973.
[44] Z. -Q. Luo, J. S. Pang, and D. Ralph. Mathematical Programs with Equilibrium Constraints [M]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1966.
[45] J. Outrata, M. Kocvara and J. Zowe. Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equlilibrium Constraints: Theory, Applications, and Numerical Results [M]. Kluwer Academic Publisher, Dordrect, The Netherlands, 1998.
[46] M. Fukushima and G. H. Lin. Smoothing methods for mathematical programs with equilibrium constraints [C]. Proceedings of the ICKS'04, IEEE Computer Society, 206-213, 2004.
[47] R. W. Cottle, J. S. Pang and R. E. Stone. The Linear Complementarity Problem [M], Academic Press, Boston, 1992.
[48] F. Facchinei and J. S. Pang. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems [M]. Volume I and II, Spring-Verlag, New York, 2003.
[49] P. T. Harker and J.S. Pang. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems: A survey of theorey, algorithms and applications [J]. *Mathematical Programming,* 48:161-220, 1990.
[51] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海科技出版社. 2006.
[52] T. E. Smith. A solution condition for complementarity problem with application to spatial price equilibrium [J]. *Applied Mathematics and Computation,* 15:61-69, 1984.
[53] X. Chen and P. Tseng. Non-interior continuation methods for solving semidefinite complementarity problems [J]. *Mathematical Programming,* 95:431-474, 2003.
[54] L. Faybusovich. Linear systens in Jordan algebras and primal-dual interior algorithms [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 86:149-175, 1997.
[55] M. S. Gowda and R. Sznajder. Some global uniqueness and solvablity results for linear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 18:461-481, 2006.
[56] A. Yoshise. Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 17:1129-1153, 2006.
[57] L.C. Kong, J. Sun and N. H. Xiu. A regularized smoothing Newton method for symmetric complementarity problems [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 19:1028-1047, 2008.
[58] Z. H. Huang and T. Ni. Smoothing algorithms for complementarity problems over symmetric cones [J]. *Computational Optimization and Applications.* 45:557-579, 2010.
[59] 何炳生. 凸优化和单调变分不等式的收缩算法(讲义) [M]. 见http://math.nju.edu.cn/~hebma/.
[60] G. Gürkan, A. Y. Ozge and S. M. Robinson. Sample-path solution of stochastic variational inequalities [J]. *Mathematical Programming,* 84:313-333, 1999.
[61] X. Chen and M. Fukushima. Expected residual minimization method for stachastic linear complementarity problems [J]. *Mathematics of Operarions Research*, 30:1022-1038, 2005.
[62] M. J. Luo and G. H. Lin. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems [J]. *Journal of Optimization and Theory Applications,* 142:569-581, 2009.
[63] G. H. Lin and M. Fukushima. Stochastic equilibrium problems and stochastic mathematical programs with equilibrium constraints: A survey [J]. *Pacific Journal of Optimization,* 6:455-482, 2010.
[64] J. J. Ye and D. L. Zhu. New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining MPEC and the value function approach [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 20:1885-1905, 2010.
[65] J. F. Bard. Practical Bilevel Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications [M]. Kluwer Academic, 1998.
[66] B. Colson, P. Marcotte and G. Savard. An overview of bilevel programming [J]. *Annals of Operations Research,* 153:235-256, 2007.
[67] S. Dempe. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Optimization*, 52:333-359, 2003.
[68] S. Dempe. Foundations of Bilevel Programming. Nonconvex Optimization and Its Applications [M], Vol. 61, Kluwer Academic, 2002.
[69] K. Shimizu, Y. Ishizuka and J. F. Bard. Nondifferentiable and Two-level Mathematical Programming [M]. Kluwer Academic, 1997.
[70] H. S. Scheel and S. Scholtes. Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity [J]. *Mathematics of Operations Research,* 25:1-22, 2000.

[71] J. J. Ye. Constraint qualifications and necessary optimality conditions for optimization problems with variational inequality constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 10:943-962, 2000.

[72] L. Guo, G. H. Lin and J. J. Ye. Stability analysis for parametric mathematical programs with geometric constraints and its applications [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 22:1151-1176. 2012.

[73] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming [C], in: J. Neyman (ed.), Proceedings of the SecondBerkeley Symposium on mathematical Stastics and Probability, pp. 481-492, 1951.

[74] K. J. Arrow, E. W. Barankin and D. Blackwell. Admissible points of convex sets [C], Contribution to the Theory of Games, Edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp. 87-92, 1953.

[75] D. Kalyanmoy. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms [M]. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 2001.

[76] J. M. Borwein and D. Zhuang. Superefficiency in vector optimization [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 338:105-122, 1993.

[77] J. Jahn. Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions [M]. Springer-Verlag, 2004.

[78] D. T. Luc. Theory of Vector Optimization [M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[79] G. Y. Chen, X. X. Huang and X. Q. Yang. Vector Optimization, Set-Valued and Variational Analysis [M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[80] B. S. Mordukhovich. Variational Analysis and Generalized Differentiation [M]. Springer-Verlag, New York, 2006.

[81] Y. Sawaragi. Theory of Maultiobjective Optimiation [M]. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 176, Academic Press Inc., London, 1985.

[82] D. Gale, H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Linear programming and the theory of games [C]. In: Koopmans (Ed) T C,"Activity Analysis of Production and Allocation", New York: John Wiley and Sons, pp. 317-329, 1951.

[83] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, and S. M. Johnson. Solution of a large-scale traveling salesman problem [J]. *Operations Research*, 2:393-410, 1954.

[84] R. E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64:275-278,1958.

[85] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computer and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness [M]. Freeman, New York, 1979.

[86] A. Schrijver. Theory of Linear and Integer Programming [M]. Wiley, New York, 1986.

[87] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. Integer and Combinatorial Optimization [M]. Wiley, New York, 1988.

[88] L. A. Wolsey. Integer Programming [M]. Wiley, New York, 1998.

[89] 孙小玲, 李端. 整数规划 [M]. 科学出版社. 北京, 2010.

[90] M. Jünger, T. Liebling, D. Naddef, G. L. Nemhauser and W. Pulleyblank. 50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art [M]. Springer, 2009.

[91] C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser, M. W. Savelsbergh and P. H. Vance. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs [J]. *Operations Research*, 46:316-329, 1998.

[92] H. W. Lenstra. Integer programming with a fixed number of variables [J]. *Mathematics of Operations Research,* 8:538–548, 1983.

[93] D. Li and X. L. Sun. Nonlinear Integer Programming [M]. Springer, New York, 2006.

[94] M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming [J]. *Journal of the ACM*, 42:1115–1145, 1995.

[95] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments [J]. *SIAM Journal on Optimization,* 11:796–817, 2001.

[96] P. A. Parrilo. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems [J]. *Mathematical Programming*, 96:293–320, 2003.

[97] D. S. Johnson. Near-optimal bin packing algorithms [D]. PhD thesis, MIT, 1973.

[98] G. Dosa and J. Sgall. First Fit bin packing: A tight analysis [J]. *STACS*, 13:538-549, 2013.

[99] J.K. Lenstra, D. B. Shmoys, and E. Tardos. Approximation algorithms for scheduling unrelated parallel machines [J]. *Mathematical Programming,* 46:259-271, 1990.

[100] E. Günther, O. Maurer, N. Megow, and A. Wiese. A new approach to online scheduling: Approximating the optimal competitive ratio [R]. arXiv:1204.0897, 2012.

[101] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem [R]. DTIC Document, 1976.

[102] J. A. Hoogeveen. Analysis of Christofides' heuristic: Some paths are more difficult than cycles [J]. *Operations Research Letters,* 10:291-295, 1991.

[103] H. C. An, R. Kleinberg, and D. B. Shmoys. Improving Christofides' algorithm for the s-t path TSP [C]. *Proceedings of the 44th symposium on Theory of Computing,* pp. 875-885, 2012.

[104] A. Sebo. Eight-fifth approximation for the path TSP [C]. *Integer Programming and Combinatorial Optimization,* 7801:362-374, 2013.

[105] D. B. Shmoys, E. Tardos, and K. I. Aardal. Approximation algorithms for facility location problems [C]. *Proceedings of the twenty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing,* pp:265-274, 1997.

[106] S. Li. A 1.488-approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem [J]. *Information and Computation,* 222:77-88, 2012.

[107] S. Li and O. Svensson. Approximating k-median via pseudo-approximation [R], arXiv:1211.0243, 2012.

[108] A. Z. Zelikovsky. An 11/6-approximation algorithm for the network Steiner problem [J]. *Algorithmica*, 9:463-470, 1993.
[109] J. Byrka, F. Grandoni, T. Rothvoβ, and L. Sanita. An improved LP-based approximation algorithm Steiner tree [J]. STOC, 583–592, 2010.
[110] F. Eisenbrand, F. Frandoni, T. Rothvoβ, and G. Schafer. Connected facility location via random facility sampling and core detouring [J]. *Journal of Computer and System Science,* 76:709-726, 2010.
[111] M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming [J]. *Journal of the ACM,* 42:1115–1145, 1995.
[112] P. Raghavendra. Optimal algorithms and inapproximability results for every CSP? [J]. STOC, 245–254, 2008.
[113] J.B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 11:796-817, 2001..
[114] P. Raghavendra and N. Tan. Approximating CSPs with global cardinality constraints using SDP hierarchies [J]. SODA, 373-387, 2012.
[115] D. Lokshtanov, D. Marx, and S. Saurabh. Lower bounds based on the Exponential Time Hypothesis [J]. *Bulletin of the EATCS*, 105:41-72, 2011.
[116] T. G. Kolda and B. W. Bader. Tensor decompositions and applications [J]. *SIAM Review*, 51:455-500, 2009.
[117] A. Cichocki. Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications of Exploratory Multi-Way Data Analysis and Blind Source Separation [M]. Wiley, 2009.
[118] L. Qi. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor [J]. *Journal of Symbolic Computation,* 40:1302-1324, 2005.
[119] L. H. Lim. Singular values and eigenvalues of tensors: A variational approach [C], in Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, Vol.1, IEEE Computer Society Press, Piscataway, NJ, 129-132, 2005.
[120] L. Qi. Eigenvalues and invariants of tensor [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 325:1363-1377, 2007.
[121] L. Qi, W. Sun and Y. Wang. Numerical multilinear algebra and its applications [J]. *Frontiers of Mathematics in China,* 2:501-526, 2007.
[122] M. F. Anjos and J. B. Lasserre. Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization [M]. Springer-Verlag, New York, 2011.
[123] Z. Li, S. He and S. Zhang. Approximation Methods for Polynomial Optimization: Models, Algorithms, and Applications [M]. Springer, New York, 2012.
[124] M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming [J]. *Journal of the ACM*, 42:1115-1145, 1995.

执笔人：孙小玲
编写组成员(依照姓氏拼音排序)：
陈旭瑾，戴彧虹，黄正海，李　端，林贵华，凌　晨，王宜举，修乃华，徐大川，杨庆之，杨晓琪，杨新民，张国川，张立卫，郑喜印

索引：
数学规划、线性规划、非线性规划、整数规划、组合优化、鲁棒优化、
多目标规划、变分不等式、互补问题、均衡约束数学规划、锥优化。