

中国博弈论新近进展及展望

摘要

1944年著名数学家冯·诺伊曼和经济学家摩根施坦合著并出版的《博弈论与经济行为》标志着博弈论作为一门独立学科的诞生。在国际上，从1994到2012年，博弈论学家已先后获得6届诺贝尔经济学奖，对于一个运筹学分支而言这是一个奇迹。随着运筹学的发展，博弈论在中国也取得了飞速的进步。本报告介绍了国内外博弈论的发展历程、主要研究方向以及常用术语的中文规范。针对八个主要方面重点介绍了国内外的研究现状以及未来五年的发展趋势展望，具体的，包括对策理论、对策论与互联网、算法博弈论、对策与社会科学、对策与可持续发展、不确定性与对策、组合拍卖以及带熵博弈局势分析。

Recent Development and Future Prospect of Game Theory in China

In 1944, the masterpiece of ‘Theory of Games and Economic Behavior’ written by famous mathematician John von Neumann and economist Oskar Morgenstern marks the game theory as an independent subject. Experts in game theory have won six Nobel Prizes in economics from 1994 to 2012, which is a miracle for a branch of operation research. With the development of operations research, the study of game theory in China has been gotten rapid advances. In this chapter we first present a brief history, definition and Chinese technical terms of game theory. Then we review advances and tendencies in eight research topics including game theory, Internet and game theory, algorithmic game theory, social science and game theory, sustainable development and game theory, uncertainty and game theory, combinatorial auction, situation analysis on games with entropy.

一、引言

博弈论，亦名“对策论”、“赛局理论”，是运筹学的一个重要学科。具有竞争或对抗性质的行为称为博弈行为。在这类行为中，参加斗争或竞争的各方各自具有不同的目标或利益。为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，并力图选取对自己最为有利或最为合理的方案。博弈论考虑游戏中的个体的预测行为和实际行为，并研究它们的优化策略。博弈论主要研究公式化了的激励结构间的相互作用，博弈行为中斗争各方是否存在着最合理的行为方案，以及如何找到这个合理的行为方案的数学理论和方法。博弈论不仅是经济学的标准分析工具之一，还在生物学、经济学、国际关系、计算机科学、政治学、军事战略和其他很多学科都有广泛的应用。

根据不同的标准有不同的博弈分类。博弈可以分为合作博弈和非合作博弈，区别在于博弈参与者策略选择的出发点是所在联盟的整体利益还是个体利益。博弈也可分为静态博弈和动态博弈。静态博弈是指在博弈中，参与者同时进行策略选择或虽非同时选择但后行动者并不知道先行动者采取了什么具体行动；动态博弈是指在博弈中，参与人的策略选择有先后顺序。“石头、剪子、布”游戏属于静态博弈，而棋牌类游戏则属于动态博弈。按照参与人对博弈信息的了解程度可分为完全信息博弈和不完全信息博弈。完全信息博弈是指在博弈过程中，每一位参与人对其他参与人的特征、策略空间及收益函数有准确的信息。如果有参与人对上述信息的全部或部分了解得不够准确或者不是完全了解，这种情况下进行的博弈就是不

完全信息博弈。目前经济学家们通常所谈论的博弈多为非合作博弈，非合作博弈又可细分为完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈以及不完全信息动态博弈。与上述四种博弈相对应的均衡概念为纳什均衡、子博弈精炼纳什均衡，贝叶斯纳什均衡以及精炼贝叶斯纳什均衡。博弈还有很多分类方式，例如以表现形式也可以分为规范型博弈或者扩展型博弈。

博弈论的研究对象与社会、政治、军事、经济、科学、技术等领域都有密切关系，是运筹学及相关领域的重要研究热点。博弈论涉及的学科甚广，包括数学、统计学、工程学、生物学、经济学、金融学、市场学、政治科学以及管理科学等等。经典博弈理论体系的主要组成部分包括零和博弈、非合作博弈、合作博弈、微分博弈、模糊博弈、机制设计以及演化博弈理论等。而诸如算法博弈、网络博弈、组合拍卖、合作的演化、由具有有限理性的行为主体参与的博弈以及博弈理论在可持续发展等问题中的应用研究则构成当今博弈理论最为前沿和热点的研究领域。

二、博弈论的发展

有关博弈论的策略性互动的理念可追溯到我国古代军事学家孙武的《孙子兵法》，当中的“知己知彼，百战不殆”已显示出博弈论研究中决策者之间互动的重要性。而有关博弈论的数学研究则可追溯到 1654 年巴斯卡和费马的五篇书信，当中所讨论到的赌金分配问题已具有博弈论的雏形，并且为概率论的发展奠定了基础。在经济学领域，古诺和伯特兰德已经运用博弈论的思想对垄断定价、生产和交易行为进行了研究。现代博弈论起源于上个世纪初，以策梅洛、博雷尔和诺伊曼等人的工作为代表。二次世界大战为博弈论的应用提供了广泛的背景，加快了博弈论体系的形成。1944 年著名数学家诺伊曼和经济学家摩根斯坦合著的专著^[1]标志着博弈论作为一门独立学科的诞生。

20 世纪五六十年代是博弈论研究、发展的重要阶段。纳什在 1950 年和 1951 年发表了两篇关于非合作博弈的重要论文^[2,3]，明确提出了纳什均衡这一基本概念，针对纳什均衡所展开的研究成为博弈理论发展的一条主线索。泽尔腾将纳什均衡的概念引入到动态分析，提出了子博弈精炼纳什均衡的概念^[4]；海萨尼则把不完全信息引入博弈论的研究，提出了贝叶斯纳什均衡的概念^[5]。由于纳什、泽尔腾和海萨尼在非合作博弈的均衡分析理论方面所做出了开创性的贡献，他们共同荣获了 1994 年的诺贝尔经济学奖。

1944 年冯·诺伊曼和经济学家奥斯卡·摩根斯坦已经提出并建立稳定集作为合作博弈的解，在之后的二十多年间，合作博弈理论体系以及一系列经典的合作博弈的解概念得以建立。1953 年吉利斯提出了核心的概念，后经沙普利和舒贝克发展成为合作博弈解的概念^[6]。同样在 1953 年沙普利运用公理化方法建立了沙普利值^[7]，1964 年奥曼和梅斯科勒引入合作博弈的谈判集，1965 年戴维斯和梅斯科勒建立了核，1969 年施梅德勒建立了核仁，1974 年欧文提出欧文值^[8]，1977 年迈尔森提出迈尔森值等作为合作博弈的解^[9]。此外，1950 年纳什建立了著名的讨价还价模型，提出了纳什谈判解的概念及其解法^[2]。

博弈论的出现令经济学产生了前所未有的变化，对当代经济学带来了革命性的冲击。博弈论不单在经济学领域被广泛地应用，更已成为经济分析的标准工具之一。由于人类的经济活动离不开人与人之间的策略互动，因此忽略人际策略相互作用的经济分析始终是行不通的，如此看来，博弈论的兴起是无可避免的。

从 1994 到 2012 年，博弈论学家已先后获得六届诺贝尔经济学奖，对于一个运筹学分支而言这几乎是一个奇迹。莫里斯、维克瑞共同荣获了 1996 年的诺贝尔经济学奖，前者在信息经济学领域做出了重大贡献，尤其是不对称信息条件下的经济激励理论；后者在信息经济学、激励理论、博弈论等方面都做出了重要的贡献。阿克尔洛夫的旧车市场模型开创了逆向选择理论的先河，斯宾塞的劳动力市场模型创立了信号传递理论，罗斯柴尔德和斯蒂格利茨

建立了一个关于竞争的保险市场的信息甄别模型。2001年诺贝尔经济学奖授予了阿克洛夫、斯宾塞和斯蒂格利茨，以表彰他们在对充满不对称信息市场进行分析领域所做出的重要贡献。此外，奥曼和谢林因为“通过博弈理论分析增加了世人对合作与冲突的理解”而共同获得了2005年诺贝尔经济学奖。2007年，赫维奇、马斯金以及迈尔森因为在创立和发展机制设计理论方面做出了突出的贡献而获奖。2012年，罗斯与沙普利因为在不同经济主体匹配的研究方面做出了出色的贡献而获奖。

20世纪80年代以来，博弈论得到了前所未有的发展，这一时期出现的比较有影响的人物包括科瑞普斯、福德伯格、泰偌勒、罗宾斯坦以及威尔森等。在20世纪90年代末，已经开始用博弈论来设计拍卖机制。史密斯设计了一个双向口头拍卖机制，这篇文章奠定了实验经济学的基础，史密斯也是2002年诺贝尔经济学奖得主之一。史密斯和普利斯提出了演化稳定策略概念，对演化博弈理论的发展做出了突出的贡献；弗雷德曼则对演化博弈在经济学中的应用进行了广泛的探讨。

（一）中国博弈论学科的发展历程

二人零和博弈的极大极小定理是博弈论的基石，由冯·诺伊曼在1928年首先给出完整证明^[2]。上世纪50-60年代，中国博弈论的研究基本上处于起步阶段^[10-18]。中国的博弈论研究开始于50年代吴文俊院士的工作，该定理是吴文俊理解博弈论的切入点，也是他研究的出发点。1959年初，吴文俊发表了他个人博弈论研究生涯，同时也是中国博弈论研究历史上的第一篇论文^[10]。吴文俊很早就意识到约翰·纳什在50年代从事的非合作博弈研究的重要性，在此基础上写了两篇有关非合作博弈的论文^[11,12]。尼古拉·沃比约夫教授是原苏联博弈论的奠基人，他对于中国博弈论的诞生和成长也曾做出重要贡献，50年代他应中国科学院的邀请来华讲授博弈论，受到周恩来总理的亲切接见，帮助中国培养了第一代博弈论领域的研究生。

“文革”十年间，中国博弈论的研究处于停滞状态，即使是数学家们也几乎听不到关于博弈论的任何消息。而这个时间恰好是国际博弈论迅速发展的关键时期，非合作均衡理论体系逐渐完善，并在经济学中发挥了至关重要的作用，合作博弈理论体系迅速形成。上世纪80-90年代，中国博弈论的研究进入到复苏阶段，但是这一时期的论著并不是十分丰富^[19-22]，著作^[22]对于博弈论在中国的经济、金融和管理科学领域的应用产生了重要而积极的作用。

本世纪的前十年，中国的博弈论研究领域呈现出繁荣景象，陆续出现了能够适应不同需求层面的论著^[23-25]。2004年国际动态博弈学会中国分会成立，2005年中国运筹学会对策论专业委员会成立，在国际上有中国学者担任国际动态博弈学会执行理事等重要职位。学术交流日趋活跃，在国内外特别是周边国家和地区的影响力逐渐显现，本领域的海外华人学者对于国内举办的学术交流活动的支持和响应程度逐渐增强。2002年“国际数学家大会‘对策论及其应用’卫星会议”在青岛大学召开，纳什、泽尔滕、奥曼以及沙普利等四位诺贝尔经济学奖得主同时出席会议。自2004年起，中国运筹学会对策论专业委员会已相继成功主持举办五届学术年会“中国博弈论及其应用国际学术会议”。此外，2006年协助组织举办了“第三届泛太平洋博弈论大会”，2010年全国博弈论与实验经济学研究会在北京成立并举办了“首届中国博弈论与实验经济学学会年会”。

国内博弈理论研究与国际相比虽然起步稍晚，但是近年来的发展呈现出上升趋势。研究团队目前主要分布于青岛大学、北京理工大学、贵州大学、西北工业大学、山东大学和中国科学院等高校和科研院所。

（二）博弈论学科发展趋势展望

未来五年,随着网络时代的来临以及计算手段和能力的不断进步,博弈论学科将在进一步完善基础理论体系的基础上,在算法博弈论、博弈论与互联网、博弈与社会科学、博弈与可持续发展、不确定性与博弈等几个主要研究方向取得实质性的进展。本报告在下文中将围绕这几个方向进行具体的阐述。

现有理论与实际应用的进一步完美结合。博弈理论与其他多学科理论的交叉、结合,将产生新的研究分支,例如博弈理论与金融投资决策与分析的期权理论相结合,产生在不确定性环境下的金融投资博弈模型及其理论分析框架;与经济和管理领域的行为理论、投资者异质性理论相结合也将在理论和应用两个层面取得新的进展。

有限理性与行为假设和在此基础上进行的仿真及实验研究。人类的决策行为具有明显的有限理性特征,基于完全理性假设的经典博弈理论难以预测或解释现实的经济管理系统中出现的行为与现象。从有限理性假设、行为视角以及复杂性科学出发,并与其他学科有机结合,并运用实验研究、现代仿真技术等手段与方法,研究行为主体之间的交互作用交互影响的特征和机理、合作的演化及其规律,将成为博弈科学研究的一个重要发展趋势。

三、博弈论的主要研究方向

(一) 博弈论的基础理论研究

1. 合作博弈与非合作博弈

截止到目前为止,博弈论体系中最为完善的组成部分是零和博弈,其在应用方面最著名的例子是冷战时期美国和原苏联之间的军备竞赛以及著名的核遏制战略。纳什在上个世纪 50 年代初奠定了非合作博弈的基础,对非合作博弈论体系的建立做出了重大贡献。事实上,因在“非合作博弈论中开创性的均衡分析”方面的杰出贡献,泽尔腾、海萨尼与纳什同时获得 1994 年诺贝尔经济学奖,他们的贡献涵盖了具有完全或不完全信息的静态、动态博弈的均衡分析理论。

近二十年,纳什均衡以及非合作博弈理论成为研究的热点,合作博弈理论的发展迟滞大致有以下三个原因。首先,大多数合作理论忽视了外部效应:联盟可能会被不属于这个联盟的局中人的行动影响;其次,合作博弈论假设能够得到帕累托有效的结果;最后,合作博弈认为会形成极大联盟。合作博弈的这些特性是存在问题的,因为在大多数经济学的应用环境中外部效应是重要的,帕累托无效也会发生,而且极大联盟也可能不会形成。纳什曾经提议将合作与非合作理论统一起来,这就是著名的纳什仲裁方案,但它在应用上还没有产生太大的影响。

本世纪初,十九位世界博弈论领域的权威学者接受采访,回答同样的五个问题,并对博弈论研究领域未来发展前景做出预测。有多位学者一致认为合作博弈论在 20 世纪被忽视或者应该得到更多重视。经典合作博弈主要关注多个局中人之间的联盟形成方式及联盟效用分配方案,即多人结盟合作博弈的解,在 20 世纪中叶有过较多的研究,提出了一些重要的多人结盟合作博弈的解概念。目前多人合作博弈的发展明显滞后于多人非合作博弈,经典合作博弈论的突出特征是局中人的完全理性假设以及理论体系的不完善,因而“合作博弈让人们苦恼很长时间”。

在合作及非合作博弈理论方面,国内学者提出弱稳定集作为新一类合作博弈的解;针对局中人在完全或部分合作条件下的扩展型合作博弈,通过设定合作函数刻画局中人选择个体理性行为或合作行为的变化动态并建立完整的算法;针对合作微分博弈解的动态稳定性问题,通过引入相应的分配补偿程序,建立动态稳定或强动态稳定的最优准则。专著^[25]对上述研究工作做了系统的总结。针对图上博弈,在有限连通图上证明了简单策略以及 r -策略情

形下绝对均衡的存在性定理并建立完整的算法^[26]。针对集合博弈，提出了拟边缘贡献解等几类分配方案；利用矩阵的方法，研究了多类合作博弈解的公理化理论；定义了新的区间运算法则，提出了区间合作博弈单值解以及核心的概念；当联盟结构受限为图结构、拟阵结构、稳定联盟结构时，利用解的相容性研究了合作博弈解的结构变化与特征^[27-29]。

未来几年内，合作博弈论的进展将主要体现在以下几个方面：1) 建立新的最优准则，从而导致新的合作解；2) 经典合作解在具有非完全合作特性、广义合作方式的博弈、微分博弈以及 NTU 博弈模型中的扩展或变型；3) 在局中人具有有限理性的合作博弈中合作解的建立、存在性及其特性；4) 经典合作解在动态合作博弈、图上博弈以及网络博弈中的运用；5) 运用公理化方法建立或研究合作解；6) 经典合作解在社会、经济、管理领域模型中的应用研究等。

2. 网络博弈

网络博弈完全是在近二十年产生与发展起来的，针对网络博弈、网络生成和演化的动态过程的研究是 20 世纪后期博弈理论领域具有重大突破的博弈论课题，其中网络生成博弈理论是网络博弈领域中相对完善的组成部分。网络环境下的策略互动以及学习一般被认为是网络演化的内因，内生或外生的网络结构表现出节点所代表的局中人之间的互动模式，局中人之间的互动也是在该网络中信息流动和传播得以实现的载体。

上世纪 90 年代初，人们提出了网络上策略互动相关的概念，并对不同网络上的局部互动和全局互动的异同进行了比较性研究。此后人们又对一般网络中基于协同博弈的互动进行了研究，并对基于协同博弈的互动模型中个体的行动选择与邻居不同行动选择情况之间的关系进行了深入的研究。在很多近期的研究工作中，互动邻居不再仅仅是局中人的直接邻居，其邻居的邻居或者邻居的邻居的邻居也可能参与到与该局中人的互动过程。事实上，这类类似于经济网络中的行为主体既可能从他们的直接竞争对手处获得信息，又可以从那些与他们间接相关的主体那里得到有关信息。

20 世纪末，人们开始研究网络环境下的模仿行为，相关工作重视区别信息结构和行为准则，一般来说，模仿谁比如何模仿更重要。特别地，如果一个人模仿的是他的对手，那么结果将变得非常具有竞争性；如果一个人模仿的是与自己面临同样问题，但与别的对手进行对局的局中人，那么最终将得到纳什均衡。

近几年，人们开始研究模仿准则下有效行动的蔓延、互动博弈进程中网络与行动选择的协同进化。此外，网络博弈研究领域中的非常有价值的研究课题还包括博弈论在解决网络安全问题及一般冲突控制系统的优化问题中的应用。

国内针对网络博弈的研究处于起步阶段，在针对动态网络生成博弈、内生网络环境下的策略互动以及网络环境下的学习理论的研究方面已取得初步进展；利用博弈理论，研究了无线自组网的信息安全与激励机制^[30]。

3. 微分博弈

动态博弈和微分博弈是博弈理论领域中更为复杂但同时也是最具活力的研究领域之一，其中相互竞争的各方在关于时间连续的进程中采取决策，并附加信息结构、不确定性以及预先协商的可能性等假设。由于微分博弈模型中局中人决策相对于时间的连续性、对支付函数所应满足条件的严格限制以及研究结果在除军事之外的其他领域长期没有得到有效的应用等原因，微分博弈在过去甚至是现在都是一个颇具争议的研究领域。

微分博弈的起源可追溯到 20 世纪 40 年代，伊萨克为公认的微分博弈之父。微分博弈的第一篇文献是伊萨克在兰德公司发表的。1951 年伊萨克发表了微分博弈的首篇论文，系统

研究了一个零和微分博弈及其解法。1965年伊萨克发表《微分博弈》这部经典之作，它与贝尔曼1957年发表的《动态规划》以及庞德里亚金1962年发表的《最优过程的数学理论》共同奠定了确定性微分博弈的理论基础。微分博弈领域中最初的研究成果是运用最优控制理论的结果求解微分博弈问题。1964年伯克维奇将变分法应用于微分博弈，莱特曼和莫恩1967年研究了微分博弈的几何问题，1966年庞德里亚金提出运用极大值原理解决微分博弈问题。

大体上，微分博弈可分为零和微分博弈和非零和微分博弈，亦可分为确定性微分博弈和随机微分博弈。微分博弈的求解方法可分为三种：开环纳什均衡、闭环纳什均衡和反馈纳什均衡。非零和确定性微分博弈开环均衡的求解最早见于伯克维奇1964年的工作，而非零和确定性微分博弈的开环与反馈纳什均衡的研究最早见于凯斯1967年和1969年以及斯塔尔和霍欧1969年的研究。

在微分博弈的解法中，开环解法相对于反馈解法是较易于分析处理和应用的，而反馈解法虽然较为复杂，但却避免了时间一致性的问题。与确定性微分博弈相比，随机微分博弈是属于更为复杂的决策情况。1969年弗莱明求得了随机控制的解法，使得随机微分博弈能够被分析。但由于动态演化与随机因素需要同时考虑，因此给出随机微分博弈的解法非常困难。彼得罗相提出并解决了复杂冲突控制系统中的时间一致性问题，而关于合作随机微分博弈的子博弈一致性的理论体系正是以此为基础^[31]。

微分博弈领域的研究成果在各个学科领域以及数学的分支领域仍然不断涌现，特别的，在经济以及管理科学领域中的应用研究发展迅速。著作^[20]是国内最早出现的微分博弈专著。近年来，国内学者在经济管理领域运用微分博弈理论也取得了一些可喜的进展，但总体上与国际先进水平尚存在较大差距。

4. 机制设计

机制设计理论起源于赫尔维茨1960年和1972年的开创性工作^[32]。它所讨论的一般问题是，对于任意给定的一个经济或社会目标，在自由选择、自愿交换、信息不完全等分散化决策条件下，能否设计以及怎样设计出一个经济机制，使经济活动参与者的个人利益和设计者既定的目标一致。从研究路径和方法来看，与传统经济学在研究方法上把市场机制作为已知，研究它能导致什么样的配置有所不同，机制设计理论把社会目标作为已知，试图寻找实现既定社会目标的经济机制。即通过设计博弈的具体形式，在满足参与者各自条件约束的情况下，使参与者在自利行为下选择的策略的相互作用能够让配置结果与预期目标相一致。

机制设计理论被认为是经济学中的“工程学”部分。机制设计者为了特定的目标或目的需要一个机制或博弈以使所期待的目标出现在均衡中，即博弈是被选择的而不是给定的。近几十年来，机制设计理论一直是现代经济学研究的核心主题之一，有众多经济学家在这个领域做出了重要贡献，2007年诺贝尔经济学奖授予赫尔维茨、马斯金以及迈尔森，以表彰他们为“机制设计理论奠定了基础”。

5. 演化博弈

演化博弈理论最早源于遗传生态学家对动物和植物的冲突与合作行为的博弈分析，他们发现动植物演化结果在多数情况下都可以在不依赖任何理性假设的前提下用博弈论方法来解释。但直到史密斯和普瑞斯1973年在他们发表的创造性论文中首次提出演化稳定策略概念以后，才标志着演化博弈理论的正式诞生。生态学家泰勒和琼蔻1978年在考察生态演化现象时首次提出了演化博弈理论的基本动态概念——模仿者动态，这是演化博弈理论的又一次突破性发展。模仿者动态与演化稳定策略一起构成了演化博弈理论最核心的一对基本概念，它们分别表征演化博弈的稳定状态和向这种稳定状态的动态收敛过程，演化稳定策略概念的拓展和动态化构成了演化博弈论发展的主要内容。

在最初的演化稳定策略定义的基础上,为使其与现实更加接近,上个世纪九十年代多位学者针对不同群体和因素影响下的演化稳定策略概念进行了卓有成效的研究和理论拓展。另一方面,20世纪80年代以来,随着演化博弈理论在经济学领域中的引入,经济学领域中演化博弈论的发展和应用研究成果显著,众多学者应用演化博弈论的理论研究了各种经济领域内的相关问题。进入21世纪以来,我国学者也开始关注演化博弈论,一些国内学者运用演化博弈论理论和方法分析研究了相关领域内的具体问题。

6. 合作的演化

合作演化的问题严格的说不能算是纯粹的博弈问题。非合作博弈中合作行为的产生是一个在近期受到众多学科关注并且具有重要发展潜力的前沿问题,博弈论在该领域应该扮演关键的角色。当今世界面临很多紧迫的问题,如森林砍伐、过渡捕捞、气温变化,这些被称为公共问题,这些问题的解决方案需要成百上千人的合作。然而如此大范围的合作,却被合作困境所困扰。在每个人仅考虑个人兴趣的标准预测中,大部分合作是不实现的,因为具有搭便车行为的人不可能在不考虑个人成本的情况下考虑公共利益。

合作演化研究手段主要包括实体实验和仿真实验两种,未来五年的研究重点是,在非合作博弈的条件下,什么机制导致合作行为的出现?具体的研究课题大体上可以分成以下几个方向:1)基于选择模式的研究;2)基于互惠机制理论的研究(包括直接互惠与简介互惠);3)基于多行为主体的研究;4)基于空间结构的研究等。

7. 纳什均衡的稳定性与选取

纳什均衡是非合作博弈理论的核心概念。非合作博弈通常有多个纳什均衡,而且不同的均衡点有不同的结果,如何选取更合理的纳什均衡一直是非合作博弈论的重要研究课题。博弈论学者提出了多种均衡点的精炼概念,如泽尔腾^[4]的完美均衡、迈尔森^[33]的真均衡、科瑞普斯和威尔森^[34]的序贯均衡、吴文俊和江嘉禾^[12]的本质均衡、科尔伯格和梅腾斯^[35]的纳什均衡的本质连通区等。特别值得一提的是,1962年吴文俊和江嘉禾从稳定性的研究出发,引入了本质均衡的概念,这是最早的纳什均衡的精炼概念。遗憾的是,由于本质均衡的要求太强,因而不能保证其存在性。吴文俊和江嘉禾证明了,大多数有限非合作博弈的纳什均衡点都是本质的,且每个有限博弈都能被一系列所有均衡都是本质的有限博弈来逼近。1963年江嘉禾^[15]进一步引入了纳什均衡的本质连通区的概念,并证明了每个有限博弈的均衡点集中都有一个本质连通区。

上世纪90年代以来,国内学者对具有一般策略空间和一般支付函数的非合作博弈模型的纳什均衡点的选取进行了深入研究,得到了一系列深刻结果。这些研究工作从均衡点的稳定性出发,分别考虑支付函数或策略集的扰动以及两者同时扰动,引入本质纳什均衡点和纳什均衡的本质集以及本质连通区的概念。从1999年开始,国内学者首先证明了对一般非合作问题构成的问题空间,大多数的博弈问题的均衡点都是本质的,进而证明了每个一般非合作博弈的均衡点集中都存在一个本质连通区^[36-38]。2002年和2004年国内学者还对多目标博弈证明了弱帕累托-纳什均衡点集中至少有一个本质连通区^[39]。这些结果推广了经典文献的结果,后来也被其他学者进行了推广^[40-41]。两本专著^[23-24]对上述研究工作做了系统的总结。

展望未来,纳什均衡的精炼仍然是非合作博弈理论的重要研究方向。除了进一步开展理论研究,还需研究达成纳什均衡的过程。演化博弈论运用动力系统理论研究博弈过程中理性行为,特别是有限理性行为与纳什均衡的关系,是研究达成纳什均衡的有效途径。特别是基于纳什的博士学位论文中的质量-作用解释发展起来的群体博弈理论及其演化动力学能够更好地解释社会演化的过程。国内学者已开始对多目标群体博弈理论开展研究,期待能够在理论和应用方面取得深刻结果。

8. 匹配与市场设计

2012年, 埃尔文·罗斯与劳埃德·沙普利因为在不同经济主体匹配的研究方面做出了出色的贡献而获得诺贝尔经济学奖。他们的研究主题并不是传统意义上的经济问题, 而更加关注诸如学生录取、婚姻选择、器官移植等这类一般意义上不能引入价格机制的选择活动, 这些研究被涵盖在市场设计的主题之下。

市场设计问题被证明由于无法引入价格因素, 而需人为地设计出一种算法或程序, 以模拟完全竞争市场的分配功能、满足自由参与和帕累托效率等几种福利性质, 来实现稳定匹配的目的。事实上, 近二十年里市场设计领域在真实世界得到迅速的应用与创新, 在全美住院医生匹配计划, 新英格兰肾脏移植计划, 以及各个大学的新生录取过程中, 沙普利^[42]、罗斯^[43]以及他们的同行所找到的可以实现稳定匹配的算法被大量采用。这不但大大改善了之前种种分配算法产生的福利缺陷, 而且直接改善了参与计划者的自身福利。

关于匹配的算法方面, 1962年盖尔和沙普利在讨论男女婚姻组合和大学入学问题时提出了双边匹配模型概念以及著名的盖尔-沙普利算法^[42]。从目前的有关市场设计文献来看, 涉及到的基本的匹配算法已经有十四种之多, 这些算法所处理的问题都略有差异, 其实现的市场功能也各不相同。

国内对于匹配理论虽然有所关注, 但仅仅局限于在当前教育改革大背景下的学生录取问题。可以预见的是, 2012年诺贝尔经济学奖的结果将促进国内学者在未来几年给予该领域以足够的重视。

(二) 博弈论与互联网

这是一个随着互联网和移动网络崛起的新兴领域。互联网为人们彼此交流、参加社会经济和群体活动提供了平台。研究的问题来自于互联网形成及市场设计、网络系统及虚拟社会等。最初部分地借鉴经济学、运筹学和计算机科学的方法论描述、处理和解决这些问题。这些工具在具体应用中的反复碰撞产生了新的定义、理论和工具, 从而形成了这一领域的新研究范式。博弈论中与互联网相关的主要研究领域包括: 1) 网络参与者相互作用基本原理; 2) 群体智慧在大网络环境下的作用; 3) 互联网效用形成及市场设计原理;

中国学者积极参与了这一新兴领域的知识创造和研究, 和国际的发展基本同步。在算法原理研究方面, 论文^[44]提出了网络合作博弈中计算复杂性对合理解的重要性。论文^[45]提出了无政府比来量化个人优化与社会优化的矛盾。论文^[46]应用多项式算法分析机制设计理论。论文^[47]提出了激励比的概念描述个体在均衡环境下个人有限理性。在群体智慧研究方面, 李彦宏首先运用群体智慧进行网页排名(同期还有相关论文^[48])。论文^[49]应用算法原理研究了网络流博弈中核存在的分析方法。论文^[50]应用多数决定原则研究刻画了公共设施网络选址问题。论文^[51]提出了两个建造公用设施的算法机制。论文^[52]应用整体优化分析了核电站选址问题。社交网络系统延续了这一基本结构及原理, 论文^[53]应用社区生成博弈研究了社交网络社区形成的原理。此外, 论文^[54,55]莫立了网络广告定价的广义第二价格协议的分析方法。论文^[56]提出了前瞻型均衡概念并用于跨网络市场套利原理。论文^[57]应用多项式算法得到广告市场均衡解。论文^[58]针对买卖代理市场, 得到最优拍卖及最优均衡解。论文^[59]探讨了网络广告买家的策略性行为。论文^[60]进一步分析了买家应用联合策略的情况。

博弈论在互联网有着巨大的空间。除了对自利和理性的网络参与者分析之外, 在统计行为和博弈行为及集体知识挖掘的方法方面有着很好的前景。

(三) 算法博弈论

算法博弈论是计算机科学、博弈论和经济学的交叉学科；其兴起于 20 世纪末，特别是随着互联网的发展，更多新的问题和挑战使得这个领域成为一个既有广泛现实应用又有深刻理论问题的活跃的研究领域。作为算法和博弈的交叉，算法博弈论从计算的角度研究博弈论和经济学问题。算法博弈论的核心目标是为策略环境下的问题设计算法，它将问题所研究系统的形成与运作视为一个博弈过程：由众多的寻求自身利益极大化的参与者通过相互作用实现。理性参与者相对独立的自利行动选择增加了规划者系统优化的困难。在算法博弈论中，算法的设计与分析既要为博弈的参与者个体制定合理的行为规则，又要力求优化系统整体性能。

算法博弈论的主要研究领域包括：1) 分析与刻画参与者个体与系统整体性能之间的动态/均衡关系；2) 度量参与者的自利行为所导致的系统性能的效率损失；3) 设计激励相容的多项式时间的算法机制使得系统在实际运行中尽可能好的实现整体优化。算法博弈论的研究热点大致包含以下几个方面：

(1) 算法机制设计：包括(不)带支付的机制、在线机制、分布式机制、协调机制设计等；其中“拍卖”的机制设计是一个研究的热点。

(2) 均衡的计算：包括计算复杂性、精确/近似均衡的算法设计、动态的收敛性等。

(3) 均衡的效率损失：包括无政府的代价、稳定的代价等。

(4) 社会网络：包括计算性社会选择、级联行为等。

较之经典的微观经济学和博弈论，算法博弈论的特点主要表现在两个方面：(1) 算法博弈论主要产生/应用于互联网等开放式大规模网络，以及搜索拍卖等非传统机制设计。(2) 算法博弈论的研究多使用定量的方法，从具体优化问题的角度对应用建模，寻求(近似)最优均衡解、判断不可解问题以及研究可解优化的上下限问题；它不仅仅关心均衡解或者机制的存在性，还强调计算它们的时间复杂性，并设计有效的算法求解博弈问题的(近似)解，利用最坏情形、近似因子等分析方法来评定解的优劣。

算法博弈论近年来得到了包括剑桥大学、耶鲁大学、康奈尔大学、哈佛大学、卡内基梅隆大学、伯克利加州大学、斯坦福大学和希伯来大学等世界各大著名研究机构的重点研究，并开设了研究生课程。四十多位权威专家就算法博弈论的基础理论和学科前沿合力撰写了专著^[61]。2012 年的哥德尔奖颁给了从事算法博弈论研究的 6 位专家。国内算法博弈论研究与国际相比，起步稍晚；目前处于初期发展阶段。研究团队主要分布于清华大学、上海交通大学、复旦大学、浙江大学、中国海洋大学、中国科学院和微软亚洲研究院。在过去 5 年中，国内研究与国际研究进一步接轨，取得主要进展包括：1) 均衡的(不)可计算/近似性^[62-65]；其中论文^[64]解决了算法博弈论中一个重要的公开问题。对二人博弈中纳什均衡的计算复杂性给出了一个完整、全面的答案；引发了国际同行的大量后续研究，2) “自私路由”博弈、“负载均衡”博弈均衡的效率损失与刻画^[66-68]；其中论文^[68]证明了关于极小化最大延迟的自私路由在非平凡网络中第一个紧的上界，3) “预算可行”的机制设计^[68,69]；其中论文^[70]大大改进了已知的近似比，4) “自私调度”的算法机制设计^[71,72]，5) 市场均衡^[47,73]，6) 付费搜索拍卖^[74,75]。

未来 5 年的研究既要攻关上述的研究热点与方向中未决的问题，同时也要应对其中随现代科技和网络快速发展变迁而出现的新挑战。其中一项重要的工作是为互联网、电子商务、社会网络等领域出现的新问题建立尽可能准确的算法博弈论模型，在此基础上发展新的理论和工具解决它们。在算法机制设计方面，考虑个体的有限理性和近似的激励相容是研究发展的新视角。期待解决的关键问题包括：解决复杂类 PPAD 和 P 是否相等的问题。这是算法博弈论、计算复杂性理论领域倍受关注的一个公开问题。问题的解决将为多项式精度的近似纳什均衡的计算提供理论的指导。从根本上回答“激励相容”的有效计算机制和传统的有效计算机制在性能上差距的程度。

（四）博弈论与社会科学

博弈论之所以对社会科学各领域都非常重要，一个原因是博弈论基于理论模型建立的一般性结果可以应用到许许多多的个例中。事实上，博弈论已成为社会科学不可或缺的研究分析工具。著名经济学家、诺贝尔经济学奖得主保罗·萨默尔森就曾说过：“想在现代社会做一个有文化的人，你就要对博弈论有一个大致了解。”

博弈论的系统研究自 20 世纪初才开始起步。初期的研究主要是针对两人零和博弈展开。在这种博弈里，一人之所得恰恰是另一人之所失。如此，博弈双方只有利益冲突而无合作可言。冯·诺伊曼在一篇使他成为博弈论奠基人的著名论文^[76]里证明了两人零和博弈的最大最小定理。由于两人零和博弈的特殊性，该定理保证“最小的收益最大化”与“最大的收益最小化”导致相同的最优决策。尔后，他和奥斯卡·摩根斯坦 1944 年合著的巨著^[1]问世，为博弈理论研究奠定了基础。之后的短短数年是博弈论发展的黄金时期，涌现出一大批杰出的博弈论专家。他们在上世纪 50-70 年代所研究出的博弈非合作解和合作解，描述动态博弈及信息条件的扩展型博弈，随机博弈，重复博弈等，极大地丰富和发展了博弈论。在此基础上发展起来的机制设计与实施理论、谈判理论、信息甄别、信号示意、匹配理论等等，使得博弈论进入社会科学，尤其是政治学与经济学应用的广阔领域。

博弈论通常被划分为合作博弈论与非合作博弈论。合作博弈论的着重点在于博弈的结果，博弈者联盟对博弈结果的影响等等。合作博弈不以参与人承诺合作为前提，而是假定有对参与人及联盟所达成的协议提供约束力并使之付诸实施的机制。有这样的机制相辅助，可达成的协议决定着各联盟影响博弈结果的能力。相比之下，非合作博弈论假定不存在这样的机制。其着重点在于博弈的过程及过程中每一参与人具体的策略选择。另一个重要区别是，非合作博弈分析需要对博弈规则有极精确的描述。

社会、政治、经济、商业等互动中充满了互动性决策。这就是为什么著作^[1]问世后不久，博弈论就不断地吸引着越来越多的来自社会科学各领域研究者的极大兴趣与投入。经过了十几年的发展与应用，博弈论也成为社会科学研究者工具箱里的利器。就拿经济学来说，全球大多数大学的经济系都将博弈论作为博士生必修或选修的课程，发表在经济学理论杂志上的许多文章都与博弈理论研究或者博弈论应用相关。诺贝尔经济学奖已多次颁发给对博弈论及其在经济学中的应用有卓越贡献的博弈论专家。博弈论出现前，经济学主要分析工具是价格理论。而价格理论的前提假设是，每个人相对于所从属的经济体或市场都微不足道，以致于他的所作所为完全不影响任何其他人。也就是说，对于市场中的每一位参与人来说，市场除他之外就是任由他买卖的价格体系组成。如此，价格理论完全忽略了经济活动中最为本质的东西，即互动性。

博弈论奠基人冯·诺伊曼和奥斯卡·摩根斯坦认为博弈最优行为有赖于参与人的合作。每一参与人通过与他人结盟，进而协商策略选择和利益分配，共同谋求各自的最大收益。他们强调结盟是决定博弈结果的一个重要因素。然而，构建参与人如何结盟以达成合作仍然是有待解决的重要博弈理论问题。此问题的解决势必会增强博弈论的可应用性。网络博弈是近年来出现的一个十分活跃的领域。网络可用来描述参与人之间的双边合作结构，也许网络博弈能够对构建联盟形成理论框架提供帮助。利用博弈论研究市场设计也是一个发展迅猛的领域。此外，分析影响博弈参与人所追求目标的行为因素，从而使博弈论与实际结合更紧密也是博弈论一个非常活跃的研究方向。

（五）博弈论与可持续发展

随着人类社会的不断发展，经济增长和资源与环境约束之间的冲突越来越显著，人们对资源、环境和可持续发展的关注达到了前所未有的高度。博弈论方法常被用来进行环境治理、可持续发展和气候变化等领域相关问题的研究。博弈论与可持续发展是博弈论和管理科学、

经济学交叉研究的新方向,这一领域存在并且常常出现许多新的冲突问题需要用到博弈论方法研究和解决。

博弈论中与可持续发展相关的主要研究领域包括:1)环境政策的激励机制设计;2)林业资源、海洋渔业资源、水资源等的保护与分配;3)国际环境合作与全球一致环境协议的形成;4)气候谈判国际争端问题的研究和解决;5)环境政策中的最优准则建立;6)环境政策的一致性问题等。

论文^[77]是研究国际环境协议形成的奠基性文献之一。论文^[78,79]对环境政策的激励机制设计进行了研究。论文^[80,81]对不完全信息条件下如何建立环境控制的最优准则进行了开创性的研究。论文^[82]是研究环境政策时间一致性问题的重要文献。

与国际相比,中国学者在这一领域的研究起步稍晚,目前处于初期发展阶段。但是已有部分学者(包括海外)应用博弈论方法在可持续发展研究领域的一些重要问题上取得有影响的工作。论文^[83]对完全信息和不完全信息条件下的碳关税博弈问题进行了开创性的研究。论文^[31,84]研究了跨界污染的合作解。论文^[85,86]分别在从关税和第三方监督机构对合作的影响两个方面对国际环境协议的有效性进行了研究。论文^[87]在水资源污染管理问题上取得重要研究进展。论文^[88]研究了合作情形下的二氧化碳减排机制。论文^[89]对碳汇林业可持续发展及博弈机制进行了研究。

在未来5年的研究中,环境治理背景下利益主体之间的博弈分析是十分值得研究的重要问题。随着全球气候变化成为科学界、政界、商界共同关注的重要问题,国际气候谈判和温室气体减排问题中出现的排放权博弈,国际气候协议的有效形成条件,如何解决国际气候谈判引发的许多国际争端,如何处理好经济发展和减少污染排放之间的关系等许多重要问题都需要以博弈论作为工具进行研究。

(六) 不确定性与博弈

经典博弈论自1944年,冯·诺伊曼和奥斯卡·摩根斯坦出版了具有里程碑意义的著作^[1]以来,博弈论的研究走上了系统化和公理化的道路,并且有了很大的发展,取得了丰富的研究成果。但是,随着科学技术的不断进步,以及现实博弈问题中人们认识问题的模糊性、所得信息的不完全性、决策环境的不确定性等复杂因素,使得模糊博弈理论与应用的研究自然地成为博弈理论中的一个新分支。模糊博弈论以经典博弈理论和模糊集理论为研究基础,可以分为模糊非合作博弈和模糊合作博弈两个研究分支,下面分别论述。

1. 模糊非合作博弈

模糊非合作博弈概念 论文^[90]首次明确地提出模糊博弈的概念,从而开启了模糊博弈的研究之门。论文^[91]提出了与论文^[90]大致相同的模糊博弈及其解的概念。此后,两篇论文的作者分别对经典博弈进行了推广,并吸引了一批博弈论专家的注意力,特别是近几年,这方面的理论研究成果颇丰,使其成为了当前博弈论研究的一个热点问题。

目前,关于模糊非合作博弈的研究主要集中在二人零和博弈和二人非零和博弈。模糊非合作博弈研究主要是利用扎德提出并发展起来的模糊集理论处理博弈论中的模糊信息,研究纳什均衡解的概念、性质以及求解模型和方法。关于模糊非合作博弈的研究大致分为三类:一是将局中人的偏好信息、策略集、期望目标等用模糊集表示;二是支付值用模糊集表示;三是策略集和支付值均用模糊集表示。其中,支付值为模糊数的矩阵对策研究得比较多。尤其是支付值为模糊数的矩阵对策的求解是这一领域的主要研究内容,已有研究的主要思想是根据模糊矩阵对策解的定义建立模糊数学规划模型,然后根据模糊集理论,尤其是模糊数的一些特征进行处理,将模糊数学规划转化为经典的数学规划,进而得到模糊矩阵对策的解。

模糊非合作博弈的研究进展 近五年来,国外学者对模糊非合作博弈的相关研究可见综述^[92]。另外,考虑到在已有研究中模糊数的比较是支付值为模糊数的矩阵对策求解的一大难题,为了避免模糊数的比较,论文^[93]采用标准的模糊序研究了支付值为模糊数的矩阵对

策的帕累托最优安全策略，并采用多目标规划求解支付值为模糊数的矩阵对策的解。

国内学者在支付值为模糊数的矩阵对策的求解方面取得了一些成果。论文^[94]根据三角模糊数的排序将求解支付值为三角模糊数的矩阵对策的解转化成多目标规划问题，并根据字典序方法求解多目标规划得到支付值为模糊数的矩阵对策的对策值是一个三角模糊数。该方法弥补了已有研究的不足，即已有的研究大多都将支付值为模糊数的矩阵对策的对策值看成实数，这显然是不符合实际的。该方法^[92,95]得到国外学者的高度评价，被国外学者多次引用。论文^[94]虽然得到两个局中人的对策值是模糊数，但是两个局中人的模糊对策值不相等，这个结论与零和博弈的定义矛盾。为此，论文^[96]证明了局中人的期望支付值关于各局势支付是单调不减的，并根据模糊数的截集和表现定理以及线性规划的对偶理论，证明了两个局中人的对策值相等且为模糊数。通过求解四个简单的线性规划得到局中人模糊对策值和对应的策略。论文^[97]将论文^[98]研究的支付值为对称的三角模糊数的方法推广到支付值为一般模糊数，研究了模糊双矩阵对策的纳什均衡策略，证明了帕累托纳什均衡解的存在性，并通过求解带参数的双矩阵对策得到支付值为模糊数的双矩阵对策的纳什均衡策略。论文^[99]利用模糊集的扩展原理，将模糊矩阵对策的求解等价为一对双层数学规划，通过对偶理论和变量替换将双层数学规划进一步转化为线性规划、得到模糊矩阵对策值的上界和下界，并根据不同的置信水平得到模糊矩阵对策值的近似隶属函数。专著^[100]研究了一般化各种类型模糊矩阵对策，包括三种类型：策略是模糊而支付是清晰，策略是清晰而支付是模糊，策略和支付均为模糊，并研究了模糊多目标矩阵对策的解的概念、求解模型与方法等，取得了一些有价值的结果。

直觉模糊非合作博弈研究现状 由于博弈所涉及的信息不完全，且涉及到经济、政治、心理行为、意识形态等复杂因素，使得模糊矩阵对策在描述与解决一些更复杂问题上显得力不从心，尤其是无法描述、刻画博弈中模糊性的“非此非彼”性，而 1986 年阿塔纳索维提出的直觉模糊集正是解决这个问题的有效方法。直觉模糊集利用双标度的隶属度与非隶属度刻画模糊性，可以同时表示支持、反对和中立三种状态，更细腻、全面地描述了客观现象的模糊性的本质。直觉模糊集是对查德模糊集最有影响的一种扩展，已经引起许多著名学者的关注，在理论和应用领域取得了一些研究成果。近几年国内外研究者开始用直觉模糊集描述博弈过程中模糊信息，研究直觉模糊非合作博弈，尤其是直觉模糊矩阵对策。

论文^[101]率先研究支付值为直觉模糊集的矩阵对策的理论模型与求解方法。给出支付值为直觉模糊集的矩阵对策的定义及其解的概念，并研究了这类对策的解的性质。利用直觉模糊集的运算法则，将求解局中人的最大-最小与最小-最大策略问题转化为求解一对辅助的非线性多目标规划。

拓展支付值为模糊数的矩阵对策的研究，文献^[102]提出了支付值为三角直觉模糊数的矩阵对策的理论模型与求解方法。给出支付值为三角直觉模糊数的矩阵对策的定义及其解的概念，并研究了这类对策的解的性质。通过研究三角直觉模糊数的排序方法，将支付值为三角直觉模糊数的矩阵对策的求解问题转化为线性规划和多目标线性规划。

模糊非合作博弈研究发展趋势 目前关于模糊非合作博弈的研究主要集中在模糊矩阵对策和模糊双矩阵对策上，但模糊多人非合作博弈的研究非常匮乏。然而，模糊双矩阵对策及多人非合作对策在实际中更为广泛，因此这两类对策将是模糊非合作对策发展的趋势。在研究中的关键问题是模型的建立与求解，但模糊双矩阵对策及多人非合作对策的求解一般来说比较困难^[103]。

直觉模糊集理论是解决更复杂认知问题的一种有效工具。将直觉模糊集理论应用到博弈论中可以有效地解决人类博弈过程中存在的各种不确定的、模糊认知问题。可以预见，直觉模糊集理论与博弈论的有机结合将是今后模糊不确定博弈研究的热点。目前关于直觉模糊非

合作博弈的研究比较少。可喜的是直觉模糊非合作博弈已经引起了国外研究者的关注，目前已有一些研究者开始研究直觉模糊非合作博弈^[104,105]。

直觉模糊非合作博弈的研究尚处于萌芽阶段。存在许多问题需进一步探讨、研究与完善。直觉模糊非合作博弈的求解是一个关键问题。由于直觉模糊集含有两标度：隶属度和非隶属度，直觉模糊矩阵博弈的求解可以看成是一类多目标规划问题。更有效的直觉模糊矩阵对策的求解方法将是今后的研究工作。已有研究主要是针对矩阵对策。如何将直觉模糊集作为一种新的数学方法研究双矩阵对策和多人多目标非合作对策，也是需要进一步探讨的问题。

2. 模糊合作博弈

模糊合作博弈概论 最初开展模糊合作博弈研究的是 2005 年和 2012 年诺贝尔经济学奖获得者奥曼和沙普利，他们于 20 世纪 60 年代在研究缺原子博弈问题时，就隐含地使用了模糊联盟和模糊合作博弈的理念，不过在那里它们被称为“理想集”和“理想集函数”^[106,107]。1972 年的论文^[8]中也隐含地使用了模糊联盟的理念。

模糊合作博弈研究的是一类模糊不确定环境下的合作博弈问题，这里博弈的不确定性主要表现在：1) 局中人参与联盟的程度是模糊的，即具有模糊联盟的合作博弈问题，简称模糊联盟合作博弈；2) 局中人的支付函数值是模糊的，即具有模糊支付的合作博弈问题，简称模糊支付合作博弈。特别地，当支付函数值用区间表示时，也称其为区间值支付合作博弈；3) 局中人参与联盟的程度和支付函数都是模糊的，即具有模糊联盟和模糊支付的合作博弈问题。我们将这些具有模糊信息的合作博弈问题统称为模糊合作博弈。

模糊合作博弈国外研究进展 在经典合作博弈中，对于联盟中的局中人实际上作了这样一种假设：联盟中每一个局中人的全部决策权都转移到了联盟。为了放松这个约束，论文^[108-110]在 n 人合作博弈中引入了模糊联盟概念，从此，在 n 人合作博弈中，联盟形成过程中的模糊性被考虑进来。在具有模糊联盟的博弈中，某一联盟中的局中人并非总是将他们的全部决策权都毫无保留地转交给联盟，他们仅按照其对联盟的参与水平来采取行动。

1980 年布特纳留曾定义了一类模糊特征函数——具有比例值的模糊特征函数，同时定义了有关此类博弈的沙普利函数。由于这一类博弈中的大多数策略关于局中人的参与水平既非单调不减也非连续，这种定义被论文^[111]认为是十分不自然的。沿袭布特纳留的思想，论文^[111]定义了另一类模糊支付函数——具有萧凯积分形式的模糊特征函数，同时还给出了基于这一类模糊特征函数的沙普利函数形式。与布特纳留的定义相比较，这一类模糊特征函数及相应的沙普利函数关于局中人的参与水平由于具备了连续性，因而在应用上更自然一些。

2001 年第一部模糊合作博弈的专著^[112]出版，其中提出了研究模糊合作博弈的基本框架，但由于某些原因，使得他的研究未能深入。2004 年论文^[113]给出了具有模糊联盟合作博弈的核心与稳定集的定义，指出当合作博弈为凸时，核心为唯一的稳定集。他们将上述两个解概念拓展到模糊宗族博弈，并验证了相关结论的一致性。2005 年论文^[114]对具有模糊联盟的合作博弈的沙普利值作了定义，该模糊博弈的沙普利值被定义为类似清晰博弈的沙普利值。在这一定义中，沙普利值是基于所有局中人的参与水平都是 1 的情形定义的，但对于局中人在一定参与水平下的支付分配问题，没有提供有效的分配方法。2011 年论文^[115]对联盟值以模糊紧区间给出的合作博弈的核心进行了研究，定义了与之匹配的解概念-F 核心。构造并分析了合作博弈的类均衡条件，指出类均衡条件为 F 核心非空的必要非充分条件。同年论文^[116]对具有非空核心的 n 人合作博弈问题，通过构造核心的最大平均字典序，定义了该类合作博弈的亚历克西亚值。当合作博弈为凸时，验证了亚历克西亚值与沙普利值的一致性。

2008 年论文^[117]扩展了论文^[111]定义的萧凯积分模糊博弈，提出了一类有模糊联盟和模糊支付的合作博弈。然而论文^[117]的定义也存在一些不合理的因素，主要有(1)定义的模糊沙普利值公理体系只是模糊联盟合作博弈的沙普利值公理体系的部分推广；(2)模糊沙普利值

不是唯一存在。2012 年论文^[118]引进了具有双模糊联盟的双合作博弈的相关概念,从公理化的角度研究了此类模糊合作博弈的沙普利值。

此外,2000 年论文^[119]指出局中人出于规避风险的目的,可能只以某种程度参与合作,由此提出了多选择模糊合作博弈的概念,但他对该类多选择博弈解的结构及公理化描述未作深入研究。2007 年论文^[120]研究了具有模糊联盟的合作博弈问题,将经典合作博弈的相关定义进行推广,并分析了两者之间的内在联系。针对凸合作博弈和可拓展合作博弈,分别引入了大核心和稳定核心,并剖析了这两种解的区别和联系。2011 年论文^[121]针对支付值以区间数据形式给出的合作博弈问题,引入了集值解的概念,从而给出了区间合作博弈的区间核心、区间优势核心和区间稳定集,研究了区间核心非空的充要条件,并论证上述解概念之间的内在联系。2013 年论文^[122]对具有模糊支付合作博弈的核心进行了研究,扩展了传统合作博弈核心解的适用范围,并以此作为模糊指派博弈问题的分配方式。

在台湾也有团队从事模糊合作博弈的理论研究工作。2007 年论文^[123]研究了模糊合作博弈的核心解,引入两条公理对合作博弈的核心结构进行刻画,进而根据一致性与反一致性对该解概念做相关比对分析。2009 年论文^[124]将互补简化合作博弈和最大简化合作博弈拓展到模糊合作博弈上,建立了一类具有模糊联盟简化合作博弈核心的公理化体系。2012 年论文^[125]介绍了具有模糊联盟合作博弈的真核心和优越核心,研究了两者之间的相互关系,以及优越核心的凸性。

模糊合作博弈国内研究进展 2005 年以来,国内学者用延拓的方法研究了模糊合作博弈的有关问题。先后提出了基于伪布尔函数的延拓方法,揭示了伪布尔延拓与 n 人合作博弈沙普利值的关系;基于萧凯积分的延拓方法和广义延拓方法,在此基础上提出了不同于论文^[111]的公理化体系,研究了此类具有模糊联盟合作博弈的沙普利值。论文^[126]研究了具有多线性延拓模糊联盟合作博弈的沙普利值,建立了相应的公理体系,给出了该类模糊合作博弈的沙普利函数表达式,并证明了其存在唯一性。论文^[127]分别定义了基于多线性延拓、比例值延拓、萧凯延拓的具有模糊联盟合作博弈的核心,给出了其具体表示形式,进一步研究了它们与具有模糊联盟合作博弈沙普利值的关系。论文^[128]指出,将经典合作博弈延拓成具有模糊联盟合作博弈有多种方法,如果不考虑具体问题的实际背景,某些延拓可能意义不大。为此,提出了一个不考虑具体延拓方法的一般化具有模糊联盟的合作博弈,研究了这种一般化具有模糊联盟合作博弈的沙普利值,并且揭示了具有多线性延拓、比例值延拓、萧凯延拓的模糊联盟合作博弈是这种一般化模糊合作博弈的特例。

从近期的文献可以看出,模糊联盟合作博弈和模糊支付合作博弈的研究已经受到越来越多学者的关注,而对于局中人参与联盟程度和支付函数同时模糊的合作博弈,只有论文^[80]做了初步的研究。为此,论文^[129]定义了一类广义模糊合作博弈及其广义模糊沙普利值,并指出这类广义模糊合作博弈包括经典合作博弈、模糊联盟合作博弈、模糊支付合作博弈以及具有模糊联盟和模糊支付的合作博弈。同时还提出了广义萧凯积分模糊博弈,给出了这类博弈的沙普利值的计算式,并证明了在此情形下沙普利值的唯一存在性。

论文^[130,131]研究了具有模糊联盟凸合作的奥宾核心和谈判集,在此基础上进一步讨论了其他几类谈判集与奥宾核心的关系。论文^[132]基于闭区间的完全序与摩尔差运算给出了新的区间大小比较准则,定义了新的区间运算法则,进而研究了区间合作博弈的区间核心、区间沙普利值,讨论了各类解的存在条件及相互关系,并利用公理化的方法证明了解的唯一性。

模糊合作博弈研究发展趋势 目前,关于模糊合作博弈的研究还主要停留在参与合作的局中人可以自由结合形成联盟并获得收益的前提下展开的。但是,由于参与合作的局中人在宗教信仰、政治、文化等方面的差异,局中人在参与合作时并不是自由结合形成联盟并获得收益的。为此,论文^[133]探讨了具有联盟结构的模糊合作博弈,定义了欧文联盟值的一般形式,并通过建立相应的公理体系,证明了其存在唯一性。此外,论文^[134]基于论文^[135,136]关

于动态拟阵上合作博弈的探讨,论述了动态拟阵上模糊合作博弈。探讨了拟阵上三类特殊的模糊合作博弈的核心及沙普利函数。

最近,一些博弈论专家将合作博弈用图表示,如传统合作博弈可用一个完全图表示。自论文^[9]首次提出图与合作博弈的关系以来,许多学者致力于基于图的合作博弈理论研究,开启了合作博弈研究的一个新领域--具有联盟限制合作博弈。论文^[137]从模糊图论的角度研究了具有模糊交流结构合作博弈的迈尔森值。

另外,不同于模糊特征函数构建的传统方法,当把某些特定的模糊联盟及其相应的支付值作为样本点时,一个模糊特征函数也可以由统计学中的线性或非线性回归方法以及数值逼近的插值方法加以拟合得到,通过这样的方法得到的模糊特征函数或许与极值没有太大关系,极值在构建这一类模糊支付函数过程中将不再具有特别的含义,而仅仅是某些特殊模糊联盟的支付而已。

应该看到的是,国内从事模糊合作博弈研究起步较晚,目前从事这一方面研究的学者较少,研究成果不仅数量少,而且质量上相对于国外同行也有待提高。总的来说,对具有模糊联盟合作博弈的研究,大多都集中在对其沙普利值及其性质的研究。自2012以来,一些学者开始关注具有模糊联盟合作博弈其他解的研究,例如核心和谈判集,从而使具有模糊联盟合作博弈的研究呈现多元化的发展态势。

(七) 组合拍卖

组合拍卖提供多样商品让客户同时投标,由客户按照自己喜好各自对不同组合进行报价,从而有效分配商品,实现经济效益最大化。和单个商品的拍卖不同,组合拍卖考虑了多个不同商品之间的相关性—可替代性和互补性,因此拍卖者对不同商品的价值不再是可叠加的,使得组合拍卖的机制设计难度加大。在实用领域,组合拍卖在通讯频谱拍卖、B2B、运输服务、飞机场起落时间分派、计算机网络协议等不同领域成功地得以应用。组合拍卖最早就是在解决飞机场起落时间分派问题中被提出的^[138]。之后用于FCC主持的无线频谱拍卖机制的巨大成功大大提高了公众对组合拍卖的认同,奠定了组合拍卖的实用价值。

与组合拍卖实用领域的广泛应用相比,理论发展还较弱。特别是理论研究与实用协议的相关性亟待推进。一般拍卖理论注重以下几个基本原则:1)激励相容;2)社会福利最优;3)拍卖商收益最大;4)多项式可解;5)对不同效用函数的普适性。这些在单个商品拍卖市场可以同时做到的性质在组合拍卖市场成为了难题,使得机制设计者不得不对上述性质进行取舍。具体来说组合拍卖的理论研究热点大致包含以下几个方面:社会福利最优或拍卖商收益最优的拍卖机制的设计,保证快速可解的同时尽可能最大化社会福利或拍卖商收益的拍卖机制的设计,针对特定投标者的机制设计。而组合拍卖中投标语言的表达,竞胜标决定的问题加大了以上方面的研究难度。

国内外研究现状 组合拍卖自提出起,就一直得到来自世界各大著名研究机构的经济学家、博弈论者和理论计算机科学者的关注。在理论研究上,文献^[61,139]对早期的工作有一个很全面的总结。在应用领域上国外学者在2012年开始计划对1993年设计的通讯频谱拍卖的机制进行改进使其做到激励相容,而这将重建理论与实际的统一。国内组合拍卖的研究与国外相比虽然起步较晚,但在过去5年中,通过与国外研究机构及学者的交流合作,开始取得了不少可喜的进展。

(1) 激励相容的机制设计^[140,141]。用VCG机制,虽然可以保证1),2),5)但是无法做到3),4)。论文^[142]对其收益率的弱点有全面的分析。现阶段的研究大都集中在对近似解的研究上。论文^[143]等研究在近似最优解与机制的激励之间的关系,是一个重要的基础性工作。论文^[140]给出了VCG-based机制的第一个下界,从而证明了激励相容机制的不可近似性。文献^[142]给出了第一个近似比为常数,多项式可解的期望上的激励互容机制。

(2) 简单实用的机制设计。让投标者同时对单个商品分别出价是在通讯频谱拍卖产生的行之有效的一种组合拍卖的简化。利用各个商品拍卖进程的协调,从而提高收益^[144]。此类协议不能证明激励相容,也不能证明社会福利或拍卖商收益最优,论文^[145,146]对其理论合理性进行了分析。

(3) 对于特定应用背景下的组合拍卖机制设计^[147-150]。论文^[147]研究了频谱拍卖,论文^[148-150]研究了交通运输中的组合拍卖问题。

发展趋势及关键问题 组合拍卖在过去 30 年的发展中,在理论分析和实际应用中都有了许多进步,但仍然有许多研究课题留下探讨的空间。未来 5 年的研究一方面要继续攻克上述研究热点中没有解决的问题。对于一些基于投标者效用函数的假设应该考虑是否可以推广到更一般的情况。对于没有紧的上下界的问题可以进一步优化近似算法,拍卖理论中近似解的方法对组合拍卖理论发展和完善有一个很大空间。

另一方面,之前的研究都集中在社会福利最优及其近似上,而对于拍卖者收益最大化的研究很有限。对于单个商品的拍卖我们可以利用带保留价^[151]的机制来最大化拍卖者的收益,一个直接的问题就是这一方法是否可以推广到组合拍卖上或者有没有适用于组合拍卖的最优机制?随着组合拍卖在实际中越来越多的应用,把预算作为效用函数的一部分来设计机制也将成为研究的重点。当然遵循现在倡导的简单和实用的机制设计理念,用独立的多个拍卖来拟合组合拍卖使得两者的效果可以等价或者近似仍将是这一领域的一个关键问题。

(八) 带熵博弈局势分析

相关均衡 奥曼 1974 年引进了 n 人非合作有限规范型博弈的相关均衡的概念,其目的是为了帕累托改进纳什均衡的支付。相关均衡是纳什均衡的自然推广,是定义在全体局中人策略空间上的联合概率分布,使得如果每个局中人都接到一个按服从该分布的抽样的秘密私人建议,那么没有一个局中人有积极性单方违背这个建议而进行博弈。相关均衡是博弈论乃至经济学中一个重要的均衡,从其诞生之日起就形成了非合作策略博弈的研究热点。由于这种集合真包含着纳什均衡集作为其真子集,所以人们致力于研究有唯一相关均衡的充分条件、相关均衡与纳什均衡间的关系、相关均衡的算法、将相关均衡从策略博弈向扩展博弈的推广以及在经济学中的作用等等。

信息熵、博弈论与带熵博弈论 1944 年的巨著^[1]中证明了矩阵博弈在混合扩充的意义下必有博弈解。论文^[152]指出:“在纯粹冲突博弈论也就是零和博弈论中,……,随机化的实质是为了回避对手掌握自己的行为规律,防止对手通过分析自己的行为来掌握自己的行为规律,最终达到迷惑对手的目的。”可见顶级博弈论专家们一直都在关注着“混合策略的不明确性”及其大小的问题,可是“混合策略的不明确性”的数学定义究竟是什么?究竟如何测度它?在经典博弈论中却没有这种成分。论文^[153,154]将信息论之父香农 1948 年的信息熵概念引进经典博弈系统,从而构成新的博弈系统——带熵博弈论,就严格数学化地、圆满地解决了上述问题。

双行动带熵博弈的局势分析学 作为带熵博弈论的一种特殊情形,论文^[154,156]研究了双行动带熵博弈的局势分析学。其一,为了便于统一地更为简便地研究这类博弈,将一般的 n 人双行动博弈中局中人的两个行动做 0-1 编号,使得博弈的局势都表示为长度为 n 的二进制数,将这种博弈分为显对称、隐对称和非对称三类。并将编号后的这种博弈称为 0-1 博弈。其二,研究 n 人 0-1 博弈的严格纯纳什均衡和期望均衡与期望均衡分析。研究了这种博弈的纯纳什均衡的求解算法,并将 2×2 双矩阵博弈的局势分析方法推广到一般的 n 人 0-1 博弈。特别地给出了三人 0-1 博弈期望均衡分析的几个例子,最后研究了一种惩罚机制下一次性 n 人囚徒困境的合作性。其三,利用组合数学研究了 n 人 0-1 博弈的完全混合纳什均衡的求解法及其逆问题完全混合纳什均衡求解 0-1 博弈类。为了给三人对称 0-1 博弈的局势分

析做准备, 将其分为七种类型。其四, 研究了二人 0-1 博弈的局势分析学。将引进判别向量这一重要工具, 将奥曼相关均衡的概念限制为其边际分布恰恰构成此博弈给定的完全混合纳什均衡, 并称其为可边际相关均衡, 称带有最小熵的可边际相关均衡为最优局势分布。研究了可边际相关均衡集合和最优局势分布的求解公式, 可边际相关均衡的几何意义, 最优局势分布与期望均衡的关系等等。其五, 定义了三人 0-1 博弈的可边际相关均衡的概念, 并将这种博弈所分成的七种情况, 分别研究了其可边际相关均衡集合的求解公式, 使用 MATLAB 导出了这七种情况的最优局势分布的求解公式。

公理化带熵智猪博弈论的初步研究结果 论文^[156]中讲述了一个著名实验: 将猪圈两头各安一个拱杆和一个带喷嘴食槽。拱杆被拱, 则喷嘴猪食。圈中大小两猪经过多次博弈, 最后的局势稳定行于小猪等大猪拱。按照布罗克曼 1979 年提供的数据取得法, 论文^[158]将上例引进博弈论, 称为“智猪博弈”, 并简化提炼为: 两端各安一个踏板一个带喷嘴食槽的猪圈内有大小两头猪。踏一下踏板需付 2 单位成本且喷出 10 单位猪食。大猪先到槽边可吃 9 单位, 小猪先到可吃 4 单位, 两猪同到则大猪吃到 7 单位, 等待者来食即吃且可两猪同吃。论文^[159]将论文^[158]的原始模型中的数据作了非实质化改动。论文^[160]用智猪博弈来研究大小零售商的创新博弈行为, 虽然指出大猪跑得和吃得都比小猪快, 并提到了猪的策略选择与成本有关, 但是其分析方法却是基于论文^[158]的原始模型和直观而采用定性分析法, 因而带有主观性、粗糙性和肤浅性。论文^[161]介绍了论文^[159]中的智猪博弈模型。此外, 还有一些经济学和博弈论的教科书、教学课件、研究报告、科普书以及专著中将论文^[158]模型作为双矩阵博弈的占优纳什均衡的例子。1996 年著作^[22]将“智猪博弈”引入我国, 并对个别地方稍作改动, 从此引起我国经营管理学等学科的重视, 其应用研究发展飞速。然而, 几乎所有文献都是将论文^[158]原始模型之特例所得到的大猪劳动小猪“搭便车”的结论直接套入到所研究的问题中, 不顾是否小猪劳有其利, 就直接类比出“大猪”应劳动, “小猪”应“搭便车”的普遍“结论”。尽管研究领域涉及到经济管理学各个方面但其研究方法都有不严谨性、片面性和主观性等等, 故研究成果的载体的档次偏低。更严重的是, 这种从片面数据“类比”出来的片面“结论”竟与实际统计数据 and 发达国家及我国的治国之策相矛盾。

论文^[162-164]基于二人双行动博弈的局势分析学和等喷食量和等成本极端和平和极端非和平公理化(双)智猪博弈已证狭义劳动积极性定理: 对创造可共享福利的劳动, 若强势群体劳有其利, 则 (1) 弱势群体“搭便车”等价于其所得小于成本; (2) 当弱势群体劳有其利时, 其劳动积极性高于强势群体。实际问题的资料支持和证明着本定理的正确性及传统智猪博弈应用的片面性和不可靠性。

参考文献

- [1] von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior [M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [2] Nash J. The Bargaining Problem [J]. Econometrica, 1950, 18: 155-162.
- [3] Nash J. Non-Cooperative Games [J]. Annals of Mathematics, 1951, 54: 286-295.
- [4] Selten R. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games [J]. International J. of Game Theory, 1975, 4(1): 25-55.
- [5] Harsanyi J. Games with Incomplete information Played by Bayesian Players [J]. Management Science, 1967, 14: 159-182, 320-334, 486-502.
- [6] Shapley L S, Shubik M. A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System [J]. American Political Sciences Review, 1954, 48: 787-792.
- [7] Shapley L S. A Value for n-Person Games[C]. Contributions to The Theory of Games Vol II (H. Kuhn and A. W. Tucker, Eds) (Annals of Mathematical Studies, 28, 307-17), Princeton: Princeton University Press, 1953.
- [8] Owen G. Multilinear extensions of games [J]. Management Sciences, 1972, 18(5): 64-79.
- [9] Myerson R B. Graphs and cooperation in games [J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3): 225-229.
- [10] Wu W T. A remark on the fundamental theorem in the theory of games [J]. Sci. Record (N.S.), 1959, 3: 229-233.
- [11] Wu W T. On non-cooperative games with restricted domains of activities [J]. Acta Math. Sinica, 1961, 11: 47-62 (in Chinese).
- [12] Wu W T, Jiang J H. Essential equilibrium points of n-person non-cooperative games (I) [J]. Scientia Sinica,

- 1962, 11(10): 1307-1322.
- [13] Jiang J H. Essential fixed points of the multivalued mappings [J]. *Scientia Sinica*, 1962, 11(3): 293-298.
- [14] Jiang J H. Essential equilibrium points of n-person non-cooperative games(II) [J]. *Scientia Sinica*, 1963, 12(5): 651-671.
- [15] Jiang J H. Essential Component of the Set of Fixed Points of the Multivalued Mappings and its Application to the Theory of Games [J]. *Scientia Sinica*, 1963, 12(7): 951-964.
- [16] 王建华. 对策论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1956.
- [17] J. 麦克金赛, 著. 高鸿勋等, 译. 博奕论导引[M]. 北京: 人民教育出版社, 1960.
- [18] 中国科学院数学研究所. 对策论讲义[M]. 北京: 人民教育出版社, 1960.
- [19] 张盛开. 矩阵对策初步[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980.
- [20] 张嗣瀛. 微分对策[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [21] 刘德铭, 黄振高. 对策论及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995.
- [22] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996.
- [23] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [24] 俞建. 博弈论与非线性分析续论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [25] 高红伟, [俄]彼得罗相. 动态合作博弈[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [26] Gao H W, Yang H J, Wang G X, et al. The existence theorem of absolute equilibrium about games on connected graph with state payoff vector [J]. *Science China-Mathematics*, 2010, 53(6): 1483-1490.
- [27] Sun H, Zhang S, Li X, et al. A co-marginalistical value for set games [J]. *International Game Theory Review*, 2001, 3: 351-362.
- [28] Sun H, Driessen T. Semi-marginalistic Values for Set Games [J]. *International J. of Game Theory*, 2006, 34: 241-258.
- [29] Xu G, Driessen T, Sun H. Matrix approach to dual similar associated consistency for Shapley value [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2009, 430: 2896-2897.
- [30] Wei H, Sun H. Using Bayesian game model for intrusion detection in wireless Ad Hoc networks [J]. *International J. of Communications, Network and System Sciences*, 2010, 3: 602-607.
- [31] Yeung D W K, Petrosyan L A. A cooperative stochastic differential game of transboundary industrial pollution [J]. *Automatica*, 2008, 44(6): 1532-1544.
- [32] Hurwicz L. The Design of Mechanisms for Resource Allocation [C]. *American Economic Review* 63, Papers and Proceedings, 1973, 1-30.
- [33] Myerson R B. Refinements of the Nash equilibrium concept [J]. *International J. of Game Theory*, 1978, 7: 73-80.
- [34] Kreps D, Wilson R. Sequential Equilibrium [J]. *Econometrica*, 1982, 50: 863-894.
- [35] Kohlberg E, Mertens J F. On the strategic stability of equilibria [J]. *Econometrica*, 1986, 54: 1003-1037.
- [36] Yu J. Essential equilibria of n-person noncooperative games [J]. *J. of Mathematical Economics*, 1999, 31: 361-372.
- [37] Yu J, Xiang S W. On Essential Components of the Nash Equilibrium Points [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1999, 38: 259-264.
- [38] Yu J, Luo Q. On Essential Components of the Solution Set of Generalized Games [J]. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, 230: 303-310.
- [39] Yang H, Yu J. On Essential Components of the Set of Weakly Pareto-Nash Equilibrium Points [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, 15: 553-560.
- [40] Zhou Y H, Yu J, Xiang S W. Essential stability in games with infinitely many pure strategies [J]. *International J. of Game Theory*, 2007, 35: 493-503.
- [41] Yang H, Xiao X C. Essential components of Nash equilibria for games parameterized by payoffs and strategies [J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71: e2322-e2326.
- [42] Gale D, Shapley L S. College Admissions and the Stability of Marriage [J]. *American Mathematical Monthly*, 1962, 69: 9-15.
- [43] Roth A E. The Economics of Matching [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1982, 7: 617-628.
- [44] Deng X, Papadimitriou C H. On the complexity of cooperative solution concepts [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1994, 19(2): 257-266.
- [45] Koutsoupias E, Papadimitriou C H. Worst-case equilibria [J]. *Computer Science Review*, 2009, 3(2): 65-69.
- [46] Nisan N, Ronen A. Algorithmic mechanism design [C]. *Proc. Of STOC*, 1999, 129-140.
- [47] Chen N, Deng X. Computation and incentives of competitive equilibria in a matching market [C]. *Proc. Of SAGT*, 2011, 2-6.
- [48] Kleinberg J M. Authoritative sources in a hyperlinked environment [J]. *J. of the Association for Computing Machinery*, 1999, 46(5): 604-632.
- [49] Fang Q, Zhu S, Cai M, et al. On computational complexity of membership test in flow games and linear production games [J]. *International J. of Game Theory*, 2002, 31(1): 39-45.
- [50] Chen L, Deng X, Fang Q, et al. Majority Equilibrium for Public Facility Allocation [C]. *Proc. of COCOON*, 2003, 435-444.
- [51] Lu P, Sun X, Wang Y, et al. Asymptotically optimal strategy-proof mechanisms for two-facility games [C]. *Proc. Of EC*, 2010, 315-324.
- [52] Cheng Y, Yu W, Zhang G. Mechanisms for obnoxious facility game on a path [C]. *Proc. of COCOA*, 2011, 262-271.
- [53] Chen W, Liu Z, Sun X, et al. Community detection in social networks through community formation games

- [C]. Proc. of IJCAI, 2011, 2576-2581.
- [54] Edelman B, Ostrovsky M, Schwartz M. Internet advertising and the generalized second-price auction [J]. *American Economic Review*, 2007, 97(1): 242-259.
- [55] Varian H. Position auctions[J]. *International J. of Industrial Organization*, 2007, 6: 1163-1178.
- [56] Bu T, Deng X, Qi Q. Arbitrage opportunities across sponsored search markets [J]. *Theoretical Computer Science*, 2008, 407(1-3): 182-191.
- [57] Chen N, Deng X, Ghosh A. Competitive equilibria in matching markets with budgets [J]. *ACM SIGecom Exchanges*, 2010, 9(1): Article No. 5.
- [58] Deng X, Goldberg P W, Tang B, et al. Revenue maximization in a Bayesian double auction market [C]. Proc. Of ISAAC, 2012, 690-699.
- [59] Liang L, Qi Q. Cooperative or vindictive: Bidding strategies in sponsored search auction [C]. Proc. Of WINE, 2007, 167-178.
- [60] Yao L, Chen W, Liu T Y. Convergence analysis for weighted Joint Strategy Fictitious Play in Generalized Second Price Auction [C]. Proc. Of WINE, 2012: 489-495.
- [61] Nisan N, Roughgarden T, Tardos E, et al. *Algorithmic Game Theory* [M]. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [62] Bei X, Chen W, Teng S H, et al. Bounded budget betweenness centrality game for strategic network formations [J]. *Theoretical Computer Science*, 2011, 412: 7147-7168.
- [63] Cai M C, Fang Q. Restricted core stability of flow games [C]. Proceedings of the 4th International Workshop on Internet and Network Economics (WINE), Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5385: 454-464.
- [64] Chen X, Deng X, Teng S H. Settling the complexity of computing two-player 纳什 equilibria [J]. *J. of the ACM*, 2009, 56: Article No. 14.
- [65] Deng X, Fang Q, Sun X. Finding nucleolus of flow game [J]. *J. of Combinatorial Optimization*, 2009, 18: 64-86.
- [66] Chen B, Chen X, Hu X. The price of atomic selfish ring routing [J]. *J. of Combinatorial Optimization*, 2010, 19: 258-278.
- [67] Chen B, Gurel S. Efficiency analysis of load balancing games with and without activation costs [J]. *J. of Scheduling*, 2012, 15: 157-164.
- [68] Chen X, Doerr B, Hu X, et al. The price of anarchy of selfish ring routing is two [C]. Proc. WINE, 2012, 420-433.
- [69] Bei X, Chen N, Gravin N, et al. Budget feasible mechanism design: from prior-free to Bayesian [C]. Proc. STOC, 2012, 449-458.
- [70] Chen N, Gravin N, Lu P. On the approximability of budget feasible mechanisms [C]. Proc. Of SODA, 2011, 685-699.
- [71] Lu P, Yu C. Randomized truthful mechanisms for scheduling unrelated machines [C]. Proc. Of WINE, 2008, 402-413.
- [72] Ye D, Zhang G. Coordination mechanisms for selfish parallel jobs scheduling [C]. Proc. Of TAMC, 2012, 225-236.
- [73] Chen N, Deng X, Zhang H, et al. Incentive ratios of Fisher markets [C]. Proc. ICALP, 2012, 464-475.
- [74] Bu T M, Deng X, Qi Q. Multi-bidding strategy in sponsored search auctions [J]. *J. of Combinatorial Optimization*, 2012, 23: 356-372.
- [75] Bu T M, Liang L, Qi Q. On robustness of forward-looking in sponsored search auction [J]. *Algorithmica*, 2010, 58: 970-989.
- [76] Von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiel [J]. *Mathematische Annalen*, 1928, 100: 295-320.
- [77] Barrett S. Self-enforcing international environmental agreements [J]. *Oxford Economic Papers*, 1994, 46: 878-894.
- [78] Conrad K, Wang J. On the design of incentive mechanisms in environmental policy [J]. *Environmental and Resource Economics*, 1993, 3: 245-262.
- [79] Jørgensen S, Zaccour G. Incentive equilibrium strategies and welfare allocation in a dynamic game of pollution control [J]. *Automatica*, 2001, 37(1): 29-36.
- [80] Kwerel E. To tell the truth: imperfect information and optimal pollution control [J]. *The Review of Economic Studies*, 1977, 44(3): 595-601.
- [81] Dasgupta P, Hammond P, Maskin E. On imperfect information and optimal pollution control [J]. *The Review of Economic Studies*, 1980, 47: 857-860.
- [82] Petrosjan L A, Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction [J]. *J. of Economic Dynamics & Control* 2003, 27(3): 381-398.
- [83] Eyland T, Zaccour G. Strategic effects of a border tax adjustment [J]. *International game theory review*, 2012, 14(3): 1250016-1-1250016-22.
- [84] Yeung D W K. Dynamically consistent cooperative solution in a differential game of transboundary industrial pollution [J]. *J. of Optimization Theory and Applications*, 2007, 134: 143-160.
- [85] Lessmann K, Marschinski R, Edenhofer O. The effects of tariffs on coalition formation in a dynamic global warming game [J]. *Economic Modelling*, 2009, 26: 641-649.
- [86] 祖垒, 张锦, 李自然, et al. 国际环境公约有效性研究: 引入监督机构的方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31 (12): 2316-2320.
- [87] Ni D, Wang Y. Sharing a polluted river [J]. *Games and Economic Behavior*, 2007, 60(1): 176-186.
- [88] 陈文颖, 滕飞. 国际合作碳减排机制模型[J]. *清华大学学报*, 2005, 45(6): 77-79.

- [89] 余光英. 中国碳汇林业可持续发展及博弈机制研究[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [90] Aubin J P. Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux [C]. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 1974, 279-A: 891-894.
- [91] Butnariu D. Fuzzy games: A description of the concept [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 181-192.
- [92] Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey [J]. Fuzzy Set and Systems, 2009, 160: 3184-3210.
- [93] Clemente M, Fernandez F R, Puerto J. Pareto-optimal security strategies in matrix games with fuzzy payoffs [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 176: 36-45.
- [94] Li D F. Lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers [J]. International J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge - Based Systems, 2008, 16(3): 371-389.
- [95] Bector C R, Chandra S. Fuzzy Mathematical programming and Fuzzy Matrix Games [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [96] Li D F. A fast approach to compute fuzzy values of matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers [J]. European J. of Operational Research, 2012, 223(2): 421-429.
- [97] Li C L, Zhang Q. Nash equilibrium strategy for fuzzy non-cooperative games [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 176: 46-55.
- [98] Maeda T. On characterization of equilibrium strategy of two person zero-sum game with fuzzy payoffs [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139: 283-296.
- [99] Liu S T, Kao C. Solution of fuzzy matrix games: an application of the extension principle [J]. International J. of intelligent systems, 2007, 22: 891-903.
- [100] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [101] Li D F, Nan J X. A nonlinear programming approach to matrix games with payoffs of Atanassov's intuitionistic fuzzy sets [J]. International J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 2009, 17(4): 585-607.
- [102] Nan J X, Li D F, Zhang M J. A lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular intuitionistic fuzzy numbers [J]. International J. of Computational Intelligence Systems, 2010, 3(3): 280-289.
- [103] 李登峰. 直觉模糊集决策与对策分析方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.
- [104] Aggarwal A, Dubey D, Chandra S, et al. Application of Atanassov's I-Fuzzy Set Theory to Matrix Games with Fuzzy Goals and Fuzzy Payoffs [J]. Fuzzy Information and Engineering, 2012, 4(4): 401-414.
- [105] Nayak P K, Pal M. Bi-matrix games with intuitionistic fuzzy goals [J]. Iranian J. of Fuzzy Systems, 2010, 7(1): 65-79.
- [106] Aumann R J, Shapley L S. Values of Non-Atomic Games, Part I: The axiomatic approach [R]. Santa Monica: Rand Corporation, 1968.
- [107] Aumann R J, Shapley L S. Values of Non-Atomic Games, Part II: The random order approach [R]. Santa Monica: Rand Corporation, 1969.
- [108] Aubin J P. Cooperative fuzzy games [J]. Mathematical Operation Research, 1981, 6 (1): 1-13.
- [109] Aubin J P. Cooperative fuzzy games: the static and dynamic points of view [J]. Studies in Management Sciences, 1984, 20: 407-428.
- [110] Butnariu D. Stability and Shapley value for an n-persons fuzzy game [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1980, 4: 63-72.
- [111] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games [J]. European J. of Operational Research, 2001, 129: 596-618.
- [112] Mares M. cooperative fuzzy games: Co-operation with Vague Expectations [M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2001.
- [113] Tijs S, Branzei R, Ishihara S, et al. On cores and stable sets for fuzzy games [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146: 285-296.
- [114] Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. Models in cooperative game theory: crisp, fuzzy and multichoice games [C]. Springer Verlag, 2005.
- [115] Mallozzi L, Scalzo V, Tijs S. Fuzzy interval cooperative games [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 165(2): 98-105.
- [116] Tijs S, Borm P, Lohmann E, et al. An average lexicographic value for cooperative games [J]. European J. of Operational Research, 2011, 213(1): 210-220.
- [117] Borkotokey S. Cooperative games with fuzzy coalitions and fuzzy characteristic functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(2): 138-151.
- [118] Borkotokey S, Sarmah P. Bi-cooperative games with fuzzy bi-coalitions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 198(1): 46-58.
- [119] Calvo E, Santos J C. A value for multichoice games [J]. Mathematical Social Sciences, 2000, 40(3): 341-354.
- [120] Azrieli Y, Lehrer E. On some families of cooperative fuzzy games [J]. European J. of Operational Research, 2007, 36: 1-15.
- [121] Alparslan S. Set-valued solution concepts using interval-type payoffs for interval games [J]. J. of Mathematical Economics, 2011, 47: 621-626.
- [122] Monroy L, Hinojosa M A, Mármol A M, et al. Set-valued cooperative games with fuzzy payoffs. The fuzzy assignment game [J]. European J. of Operational Research, 2013, 225(1): 85-90.
- [123] Hwang Y. Fuzzy games: A characterization of the core [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 2480-2493.
- [124] Hwang Y, Liao Y. The consistent value of fuzzy games [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(5): 644-656.
- [125] Wu H. Cores of fuzzy games and their convexity [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 198(1): 59-69.

- [126] Meng F, Zhang Q. The Shapley function for fuzzy cooperative games with multilinear extension form [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, 23(5): 644-650.
- [127] Yu X, Zhang Q. The fuzzy core in games with fuzzy coalition [J]. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 230(1): 173-186.
- [128] Li S, Zhang Q. A simplified expression of the Shapley function for fuzzy game [J]. *European J. of Operational Research*, 2009, 196: 234-245.
- [129] Yu X, Zhang Q. An extension of cooperative fuzzy games [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, 161(11): 1614-1634.
- [130] Yang W, Liu J, Liu X. Aubin cores and bargaining sets for convex cooperative fuzzy games [J]. *International J. of Game Theory*, 2011, 40(3): 467-479.
- [131] Liu J, Liu X. Fuzzy extensions of bargaining sets and their existence in cooperative fuzzy games [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 188(1): 88-101.
- [132] Han W, Sun H, Xu G. A new approach of cooperative interval games: The interval core and Shapley value revisited [J]. *Operations Research Letters*, 2012, 40: 462-468.
- [133] Meng F, Zhang Q. The Owen coalitional value for cooperative fuzzy games [J]. *International J. of Fuzzy Systems*, 2012, 14(1): 22-34.
- [134] Meng F, Zhang Q. The fuzzy core and Shapley function for dynamic fuzzy games on matroids [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2011, 10(4): 369-404.
- [135] Bilbao J M, Driessen T S H, Losada A J, et al. The Shapley value for games on matroids: The static model [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2001, 53(2): 333-348.
- [136] Bilbao J M, Driessen T S H, Losada A J, et al. The Shapley value for games on matroids: The dynamic model [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2002, 56(2): 287-301.
- [137] Jiménez-Losada A, Fernández J R, Ordóñez M. Myerson values for games with fuzzy communication structure [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2013, 213: 74-90.
- [138] Rassenti S J, Smith V L, Bulfin R L. A Combinatorial Auction Mechanism for Airport Time Slot Allocation [J]. *Bell J. of Economics*, 1982, 13(2): 402-417.
- [139] Cramton P, Shoham Y, Steinberg R. *Combinatorial Auctions*[M]. Cambridge and London: The MIT Press, 2006.
- [140] Buchführer D, Dughmi S, Fu H, et al. Inapproximability for vcg-based combinatorial auctions [C]. *Proc. Of SODA*, 2010, 518-536.
- [141] Dughmi S, Roughgarden T, Yan Q. From convex optimization to randomized mechanisms: toward optimal combinatorial auctions [C]. *Proc. Of STOC*, 2011.
- [142] Ausubel L M, Milgrom P. The lovely but lonely Vickrey auction [C]. *Combinatorial auctions 2006*, 17-40.
- [143] Lehmann D, Ocallaghan LI, Shoham Y. Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions [J]. *J. of the ACM*, 2002, 49: 577-602.
- [144] Ausubel L M, Milgrom P. Ascending Auctions with Package Bidding [J]. *The B.E. J. of Theoretical Economics*, 2002, 1: Article no. 1.
- [145] Fu H, Kleinberg R, Lavi R. Conditional equilibrium outcomes via ascending price processes with applications to combinatorial auctions with item bidding [C]. *Proc. Of EC*, 2012, 586.
- [146] Feldman M, Fu H, Gravin N, et al. Simultaneous auctions are (almost) efficient [C]. *Proc. Of*, 2012, 201-210.
- [147] Dong M, Sun G, Wang X, et al. Combinatorial auction with time-frequency flexibility in cognitive radio networks [C]. *Proc. Of INFOCOM*, 2012, 2282-2290.
- [148] Tian T, Wang N, Ma H, et al. A transportation service procurement problem with combinatorial auction [C]. *Proc. Of ICSSM*, 2011, 1-6.
- [149] Chen J, Huang H, Kauffman R J. A public procurement combinatorial auction mechanism with quality assignment [J]. *Decision Support Systems*, 2011, 51(3): 480-492.
- [150] Huang G Q, Xu S X. Truthful multi-unit transportation procurement auctions for logistics e-marketplaces [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2013, 47: 127-148.
- [151] Myerson R. Optimal auction design [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1981, 6: 58-73.
- [152] Schelling T. *The Strategy of Conflict* [M]. Cambridge: Harvard University Press, 1980.
- [153] 姜殿玉. 带熵博弈论及其应用[M]. 北京: 科学出版, 2008.
- [154] 姜殿玉. 带熵博弈的局势分析与计策理论(上下册). 北京: 科学出版社, 2012.
- [155] Shannon C E. A mathematical theory of communication [J]. *The Bell System Technical Journal*, 1948, 27: 379-423, 623-656.
- [156] Jiang D Y. *Situation Analysis of Double Action Games with Entropy* [M]. New York: Science Press USA Inc, 2010.
- [157] Brockmann H J, Dawkins R, Grafen A. Evolutionarily Stable Nesting Strategy in a Digger Wasp [J]. *J. of Theoretical Biology*, 1979, 77: 473-496.
- [158] Rasmusen E. *Games and Information: An Introduction to Game Theory* [M]. New York: Wiley- Blackwell, 1989.
- [159] McMillan J. *Games, Strategies, and Managers* [M]. New York: Oxford University Press, 1992.
- [160] Mudambi M S. The games retailer play [J]. *J. of Marketing Management*, 1996, 12: 695-706.
- [161] Babu P G. *Game Theory* [J]. *Resonance*, 1998, 3(7): 53-60.
- [162] 姜殿玉. 强 Rasmusen 智猪公理系统的最可能局势[J]. *系统工程*, 2012, 30(5): 96-100.
- [163] 姜殿玉. 和平-强成本假设下智猪博弈的局势可能性[J]. *系统科学与数学*, 2012, 32(9): 1145-1154.

[164] 姜殿玉. Rasumusen 智猪公理系统与一类技术创新博弈[J]. 系统工程学报, 2013, 28(2): 180-186.

执笔人: 高红伟、张强

编写组 (依照姓氏拼音排序): 邓小铁、汪寿阳、秦承忠、陈旭瑾、
李登峰、姜殿玉、聂普焱、方奇志、杨辉、孙浩、杨明、乔晗、祁琦

索引:

博弈论、合作博弈、非合作博弈、网络博弈、微分博弈、机制设计、演化博弈、算法博弈论、
组合拍卖、带熵博弈